

10. Übung zu W-Theorie und Statistik, SS 21

Kapitel 10

- (a) (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) Es werden in einer Teststraße Antigentests mit dem SARS-CoV-2 Rapid Antigen Test von Roche durchgeführt, wobei wir annehmen, dass unter den getesteten Personen 0.2% positiv sind (Prävalenz). Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein: C positiv, N negativ, C_T positiv getestet und N_T negativ getestet. Falls Sie sich in dieser Teststraße testen lassen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie positiv sind, also $P(C) = 0.002$. Für den Antigentest beträgt die Sensitivität (Wahrscheinlichkeit für richtig positiv) $P(C_T|C) = 0.9652$ und die Spezifität (Wahrscheinlichkeit für richtig negativ) $P(N_T|N) = 0.9968$.
- Berechnen Sie mit Hilfe der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit $P(C_T)$, dass Sie positiv getestet werden.
 - Sie haben Glück und werden negativ getestet: Berechnen Sie mit der Formel von Bayes die Wahrscheinlichkeit $P(N|N_T)$, dass Ihr Testergebnis richtig ist.
 - Sie haben Pech und werden positiv getestet: Berechnen Sie mit der Formel von Bayes die Wahrscheinlichkeit $P(N|C_T)$, dass Ihr Testergebnis falsch ist.
- Wundern Sie sich nicht über die hohe Wahrscheinlichkeit. In der Realität sind tatsächlich etwa $2/3$ der nachfolgenden PCR-Tests negativ.
- (b) (Bayes-Schätzer) Die Zufallsgröße X besitze eine Alternativverteilung mit $P(X = 1) = \theta$, $P(X = 0) = 1 - \theta$. Nehmen Sie als A-priori-Verteilung für θ eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ an. Ermitteln Sie die A-posteriori-Verteilung und den Bayes-Schätzer $\hat{\theta}$, falls eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ folgende Werte ergab:
- (i) $\xi = (1, 1, 0, 0, 0)$;
 - (ii) $\xi = (0, 0, 1, 0, 0)$;
 - (iii) $\xi = (1, 1, 1, 1, 1)$.
- (c) In der Situation von Aufgabe (b) liege nur eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ vor, nämlich, $\xi = (1, 1, 0, 0, 0)$. Ermitteln Sie die A-posteriori-Verteilung und den Bayes-Schätzer $\hat{\theta}$ unter folgenden Annahmen an die A-priori-Verteilung:
- (i) Die A-priori-Verteilung ist eine Gleichverteilung im Intervall $[0.2, 0.8]$;

- (ii) die A-priori-Verteilung ist eine Gleichverteilung im Intervall $[0.4, 0.6]$;
- (iii) die A-priori-Verteilung ist eine Betaverteilung im Intervall $[0, 1]$ mit Dichte $p(\theta) = 6\theta(1 - \theta)$.

Hinweis: Excel hilft hier nicht. Machen Sie die Rechnungen am besten auf einem Blatt Papier und scannen Sie es ein.

Letzter Abgabetermin: Mittwoch, 16. Juni 2021.