

10. Übung zu W-Theorie und Statistik, WS 2020/21

KW 02

- (a) (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) Von zwei Maschinen M_1, M_2 gleichen Typs werden von der ersten 40% und von der zweiten 60% der Gesamtproduktion hergestellt ($P(M_1) = 0.4, P(M_2) = 0.6$). Erfahrungsgemäß entstehen bei der ersten Maschine 7% und bei der zweiten 2% Ausschuss ($P(A|M_1) = 0.07, P(A|M_2) = 0.02$).
- (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig der Gesamtproduktion entnommenes Teil Ausschuss, d.h. was ist $P(A)$?
 - (ii) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gefundenes Ausschussteil von der ersten bzw. von der zweiten Maschine stammt, d.h. was sind $P(M_1|A)$ bzw $P(M_2|A)$?

Hinweis: Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes.

- (b) (Bayes-Schätzer) Die Zufallsgröße X besitze eine Alternativverteilung mit $P(X = 1) = \theta, P(X = 0) = 1 - \theta$. Nehmen Sie als A-priori-Verteilung für θ eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ an. Ermitteln Sie die A-posteriori-Verteilung und den Bayes-Schätzer $\hat{\theta}$, falls eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ folgende Werte ergab:

- (i) $\xi = (1, 1, 0, 0, 0)$;
- (ii) $\xi = (0, 0, 1, 0, 0)$;
- (iii) $\xi = (1, 1, 1, 1, 1)$.

- (c) In der Situation von Aufgabe (b) liege nur eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ vor, nämlich, $\xi = (1, 1, 0, 0, 0)$. Ermitteln Sie die A-posteriori-Verteilung und den Bayes-Schätzer $\hat{\theta}$ unter folgenden Annahmen an die A-priori-Verteilung:

- (i) Die A-priori-Verteilung ist eine Gleichverteilung im Intervall $[0.2, 0.8]$;
- (ii) die A-priori-Verteilung ist eine Gleichverteilung im Intervall $[0.4, 0.6]$;
- (iii) die A-priori-Verteilung ist eine Betaverteilung im Intervall $[0, 1]$ mit Dichte $p(\theta) = 6\theta(1 - \theta)$.

Hinweis: Excel hilft hier nicht. Machen Sie die Rechnungen am besten auf einem Blatt Papier und scannen Sie es ein.

Letzter Abgabetermin: Mittwoch, 27. Jänner 2020.