Übungsblatt 9

X, Y unabhängig normalverteilt $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Wie ist $Z = aX + bY + c$ normalverteilt

$$E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$= a\mu_X + b\mu_Y + c$$

da

$$E(Z) = \iint (ax + by + c) \cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= a\iint x f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + b\iint y f_{XY}(x,y)\,dx\,dy +$$
$$+ c \cdot \underbrace{\iint f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}_{=1} = aE(X) + bE(Y) + c$$

$$V(Z) = E\left((aX + bY + c - E(aX + bY + c))^2\right) =$$
$$= E\left((aX + bY + \cancel{c} - aE(X) - bE(Y) - \cancel{c})^2\right)$$
$$= E\left(\left((a(X - E(X)) + b(Y - E(Y))\right)^2\right)$$
$$= E\left(a^2(X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2(Y - E(Y))^2\right)$$
$$= a^2 E\left((X - E(X))^2\right) + 2ab\,E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) + b^2 E\left((Y - E(Y))^2\right) =$$
$$= a^2 V(X) + 2ab \underbrace{\mathrm{COV}(X,Y)}_{=0 \text{ da } X,Y \text{ unabh.}} + b^2 V(Y)$$
$$= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

daher ist $Z \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Z + c,\ a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$

somit ist hier $Z \sim \mathcal{N}(0.015\,\sigma_{zul} - 12.5\,\mu_{\rho LH} - 12\cdot 12.5,$
$0.015^2\sigma_{zul}^2 + 12.5^2\sigma_{\rho LH}) = \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

$p_f = P(Z<0) = \Phi\left(\frac{-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 0{,}00206551$