
11. Übungsaufgabe zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, WS21 | Kapitel 10

- (a) (Bedingte Wahrscheinlichkeiten) Wir führen folgende Bezeichnungen ein: I Intensivstation, N Normalstation, G vollständig immunisiert (kurz “geimpft”) und U nicht vollständig immunisiert (kurz “ungeimpft”).

Aus dem Lagebericht der Vorarlberger Krankenhäuser entnehmen wir, dass am 03.01.22 16 Covid-19-Patienten/-innen intensivmedizinische Betreuung benötigen. Davon sind 3 vollständig immunisiert. Zu diesem Zeitpunkt sind in Vorarlberg 67.99% der Bevölkerung vollständig immunisiert, d.h. $P(U) = 0.3201$ und $P(G) = 0.6799$.

- (i) Bestimmen (schätzen) Sie aus obigen Daten die Wahrscheinlichkeiten $P(U|I)$ und $P(G|I)$, dass ein Covid-19-Patient auf der Intensivstation ungeimpft bzw. geimpft ist.

- (ii) Um welchen Faktor

$$\alpha = \frac{P(I|U)}{P(I|G)}$$

unterscheidet sich die Wahrscheinlichkeit als Ungeimpfter intensivmedizinische Betreuung zu benötigen von der Wahrscheinlichkeit als Geimpfter diese zu benötigen?

- (iii) Falls wir annehmen, dass nur Personen, die 45 Jahre oder älter sind, auf der Intensivstation landen, dann können wir die Impfquote von 83.18% der Altersklasse 45+ verwenden. Wiederholen Sie für diese Impfquote (ii).

- (b) (Bayes-Schätzer) Die Zufallsgröße X besitze eine Alternativverteilung mit $P(X = 1) = \theta$, $P(X = 0) = 1 - \theta$. Nehmen Sie als A-priori-Verteilung für θ eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ an. Ermitteln Sie die A-posteriori-Verteilung und den Bayes-Schätzer $\hat{\theta}$, falls eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ folgende Werte ergab:

(i) $\xi = (1, 1, 0, 0, 0)$;

(ii) $\xi = (0, 0, 1, 0, 0)$;

(iii) $\xi = (1, 1, 1, 1, 1)$.

- (c) In der Situation von Aufgabe (b) liege nur eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ vor, nämlich, $\xi = (1, 1, 0, 0, 0)$. Ermitteln Sie die A-posteriori-Verteilung und den Bayes-Schätzer $\hat{\theta}$ unter folgenden Annahmen an die A-priori-Verteilung:

(i) Die A-priori-Verteilung ist eine Gleichverteilung im Intervall $[0.2, 0.8]$;

(ii) die A-priori-Verteilung ist eine Gleichverteilung im Intervall $[0.4, 0.6]$;

(iii) die A-priori-Verteilung ist eine Betaverteilung im Intervall $[0, 1]$ mit Dichte $p(\theta) = 6\theta(1 - \theta)$.

Laden Sie Ihre Files im OLAT in Ihren Aufgabenbaustein **Übungsaufgabe 11** hoch.

Letzter Abgabetermin: 10.02.22!