(a) Ein Träger unter gleichmäßiger Streckenlast L werde nach der Beziehung

$$Z = W\sigma_{\mathtt{zul}} - M_{\mathtt{max}} \geq 0$$

bemessen ($M_{\mathtt{max}} \ldots$ maximales Moment, $W \ldots$ Widerstandsmoment, $\sigma_{\mathtt{zul}} \ldots$ Fließspannung). Für einen Rechteckträger der Dicke h, Breite b, Länge ℓ unter Eigengewicht (pro Länge) $\gamma_E bh$ und Belastung durch ein Material der Wichte γ_L und Höhe H ist

$$Z = \frac{bh^2}{6}\sigma_{\mathtt{zul}} - \big(\gamma_E bh + b\gamma_L H\big)\frac{\ell^2}{8}\,.$$

Wir nehmen folgende Daten als deterministisch an:

$$b = 1\,[\mathtt{m}],\ h = 0.3\,[\mathtt{m}],\ \gamma_E = 40\,[\mathtt{kN/m}^3],\ \ell = 10\,[\mathtt{m}]$$

und erhalten $Z = 0.015\,\sigma_{\mathtt{zul}} - \big(12 + \gamma_L H\big)12.5$. Berechnen Sie die Versagenswahrscheinlichkeit $p_f = P(Z < 0)$ unter der Annahme, dass die Größen $\sigma_{\mathtt{zul}}$ und $(\gamma_L H)$ normalverteilt sind mit

$$\mu_{\sigma_{\mathrm{zul}}} = 55000.0\,[\mathtt{kN/m}^2],\ \sigma_{\sigma_{\mathrm{zul}}} = 2886.2\,[\mathtt{kN/m}^2],$$
$$\mu_{(\gamma_L H)} = 25.0\,[\mathtt{kN/m}^2],\ \sigma_{(\gamma_L H)} = 9.5\,[\mathtt{kN/m}^2]\,.$$

Hinweis: Sie müssen zunächst nach den Regeln für Summen und Vielfache unabhängiger Zufallsgrößen μ_Z und σ_Z^2 berechnen, siehe Beilage.

(b) Schätzen Sie die Versagenswahrscheinlichkeit mittels Simulation in MATLAB ab.

Laden Sie Ihre Files im OLAT in Ihren Abgabenbaustein `Übungsaufgabe 09` hoch.

Letzter Abgabetermin: 22.06.22!

Übungsblatt 9

X, Y unabhängig normalverteilt $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Wie ist $Z = aX + bY + c$ normalverteilt

$$E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$= a\mu_X + b\mu_Y + c$$

da

$$E(Z) = \iint (ax + by + c) \cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= a \iint x\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + b \iint y\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy +$$
$$+ c \cdot \underbrace{\iint f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}_{=1} = aE(X) + bE(Y) + c$$

$$V(Z) = E((aX + bY + c - E(aX + bY + c))^2) =$$
$$= E((aX + bY + \cancel{c} - aE(X) - bE(Y) - \cancel{c})^2)$$
$$= E(((a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))^2)$$
$$= E(a^2(X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2(Y - E(Y))^2)$$
$$= a^2 E((X - E(X))^2) + 2ab\,E((X - E(X))(Y - E(Y))) + b^2 E((Y - E(Y))^2) =$$
$$= a^2 V(X) + 2ab\,\underbrace{COV(X,Y)}_{=0 \text{ da } X,Y \text{ unabh.}} + b^2 V(Y)$$
$$= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

daher ist $Z \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y + c,\ a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$

Übungsblatt 9

Lösung: $Z \sim \mathcal{N}(0.015\mu_{Grnl} - 12.5\mu_{yLH} - 12 \cdot 12.5,$
$0.015^2 \sigma^2_{Grnl} + 12.5^2 \sigma^2_{yLH}) = \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

$p_f = P(Z < 0) = \Phi\left(\frac{-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 0{,}00206551$

Übungsblatt 9

X, Y unabhängig normalverteilt $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Wie ist $Z = aX + bY + c$ normalverteilt

$$E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$= a\mu_X + b\mu_Y + c$$

da

$$E(Z) = \iint (ax + by + c) \cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= a \iint x\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + b \iint y\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy +$$
$$+ c \cdot \underbrace{\iint f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}_{=1} = aE(X) + bE(Y) + c$$

$$V(Z) = E\left(\left(aX + bY + c - E(aX + bY + c)\right)^2\right) =$$
$$= E\left(\left(aX + bY + \cancel{c} - aE(X) - bE(Y) - \cancel{c}\right)^2\right)$$
$$= E\left(\left(a(X - E(X)) + b(Y - E(Y))\right)^2\right)$$
$$= E\left(a^2 (X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2 (Y - E(Y))^2\right)$$
$$= a^2 E\left((X - E(X))^2\right) + 2ab\,E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) + b^2 E\left((Y - E(Y))^2\right) =$$
$$= a^2 V(X) + 2ab\,\underbrace{\mathrm{COV}(X,Y)}_{=0 \text{ da } X,Y \text{ unabh.}} + b^2 V(Y)$$
$$= a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2$$

daher ist $Z \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$

Übungsblatt 9

Lösung: $Z \sim \mathcal{N}(0.015\,\mu_{Gzul} - 12.5\,\mu_{gLH} - 12 \cdot 12.5,$
$0.015^2\,\sigma_{zul}^2 + 12.5^2\,\sigma_{gLH}^2) = \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

$p_f = P(Z < 0) = \Phi\left(\frac{-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 0{,}00206551$