Übungsblatt 9

X, Y unabhängig normalverteilt $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Wie ist $Z = aX + bY + c$ normalverteilt

$$E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$= a\mu_X + b\mu_Y + c$$

da

$$E(Z) = \iint (ax + by + c) \cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= a \iint x\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + b \iint y\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy +$$
$$+ c \cdot \underbrace{\iint f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}_{=1} = aE(X) + bE(Y) + c$$

$$V(Z) = E\left(\left(aX + bY + c - E(aX + bY + c)\right)^2\right) =$$
$$= E\left(\left(aX + bY + \cancel{c} - aE(X) - bE(Y) - \cancel{c}\right)^2\right)$$
$$= E\left(\left(\left(a(X - E(X)\right) + b(Y - E(Y))\right)^2\right)$$
$$= E\left(a^2(X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2(Y - E(Y))^2\right)$$
$$= a^2 E\left((X - E(X))^2\right) + 2ab\,E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) + b^2 E\left((Y - E(Y))^2\right) =$$
$$= a^2 V(X) + 2ab \underbrace{\mathrm{COV}(X,Y)}_{=0 \text{ da } X,Y \text{ unabh.}} + b^2 V(Y)$$
$$= a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2$$

daher ist $Z \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y + c,\ a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$

Übungsblatt 9

Lösung: $Z \sim \mathcal{N}(0.015\mu_{Zml} - 12.5\mu_{gLH} - 12 \cdot 12.5,$
$0.015^2 \sigma_{Zml}^2 + 12.5^2 \sigma_{gLH}^2) = \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

$p_f = P(Z < 0) = \Phi\left(\frac{-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 0{,}00206551$

Übungsblatt 9

X, Y unabhängig normalverteilt $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Wie ist $Z = aX + bY + c$ normalverteilt

$$E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$= a\mu_X + b\mu_Y + c$$

da

$$E(Z) = \iint (ax + by + c) \cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= a\iint x f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + b\iint y f_{XY}(x,y)\,dx\,dy +$$
$$+ c \cdot \underbrace{\iint f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}_{=1} = aE(X) + bE(Y) + c$$

$$V(Z) = E((aX + bY + c - E(aX + bY + c))^2) =$$
$$= E((aX + bY + \cancel{c} - aE(X) - bE(Y) - \cancel{c})^2)$$
$$= E(((a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))^2)$$
$$= E(a^2(X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2(Y - E(Y))^2)$$
$$= a^2 E((X - E(X))^2) + 2ab\,E((X - E(X))(Y - E(Y))) + b^2 E((Y - E(Y))^2) =$$
$$= a^2 V(X) + 2ab \underbrace{\operatorname{COV}(X,Y)}_{=0 \text{ da } X,Y \text{ unabh.}} + b^2 V(Y)$$
$$= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

daher ist $Z \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$

Übungsblatt 9

Lösung: $Z \sim \mathcal{N}\left(0.015\,\mu_{\sigma_{zul}} - 12.5\,\mu_{\gamma_{LH}} - 12 \cdot 12.5,\; 0.015^2\,\sigma^2_{\sigma_{zul}} + 12.5^2\,\sigma^2_{\gamma_{LH}}\right) = \mathcal{N}(\mu_z, \sigma_z^2)$

$$p_f = P(Z<0) = \Phi\left(\frac{-\mu_z}{\sigma_z}\right) \approx 0{,}00206551$$

Übungsblatt 9

X, Y unabhängig normalverteilt $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Wie ist $Z = aX + bY + c$ normalverteilt

$$E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$= a\mu_X + b\mu_Y + c$$

da

$$E(Z) = \iint (ax + by + c) \cdot f_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$$
$$= a \iint x\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy + b \iint y\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy +$$
$$+ c \cdot \underbrace{\iint f_{XY}(x,y)\, dx\, dy}_{=1} = aE(X) + bE(Y) + c$$

$$V(Z) = E((aX + bY + c - E(aX + bY + c))^2) =$$
$$= E((aX + bY + \cancel{c} - aE(X) - bE(Y) - \cancel{c})^2)$$
$$= E(((a(X - E(X)) + b(Y - E(Y)))^2)$$
$$= E(a^2(X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2(Y - E(Y))^2)$$
$$= a^2 E((X - E(X))^2) + 2ab E((X - E(X))(Y - E(Y))) + b^2 E((Y - E(Y))^2) =$$
$$= a^2 V(X) + 2ab \underbrace{COV(X,Y)}_{=0 \text{ da } X,Y \text{ unabh.}} + b^2 V(Y)$$
$$= a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2$$

daher ist $Z \sim N(a\mu_X + b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$

Übungsblatt 9

Lösung: $Z \sim \mathcal{N}\big(0.015\,\mu_{\sigma_{zul}} - 12.5\,\mu_{y_{LH}} - 12 \cdot 12.5,$

$0.015^2\,\sigma^2_{\sigma_{zul}} + 12.5^2\,\sigma^2_{y_{LH}}\big) = \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

$$p_f = P(Z<0) = \Phi\left(\frac{-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 0{,}00206551$$

Übungsblatt 9

X, Y unabhängig normalverteilt $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Wie ist $Z = aX + bY + c$ normalverteilt

$$E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$= a\mu_X + b\mu_Y + c$$

da

$$E(Z) = \iint (ax + by + c) \cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= a\iint x\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + b\iint y\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy +$$
$$+ c \cdot \underbrace{\iint f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}_{=1} = aE(X) + bE(Y) + c$$

$$V(Z) = E\left(\left(aX + bY + c - E(aX + bY + c)\right)^2\right) =$$
$$= E\left(\left(aX + bY + \cancel{c} - aE(X) - bE(Y) - \cancel{c}\right)^2\right)$$
$$= E\left(\left(\left(a(X - E(X)\right) + b\left(Y - E(Y)\right)\right)^2\right)$$
$$= E\left(a^2(X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2(Y - E(Y))^2\right)$$
$$= a^2E\left((X - E(X))^2\right) + 2abE\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) + b^2E\left((Y - E(Y))^2\right) =$$
$$= a^2V(X) + 2ab\underbrace{COV(X,Y)}_{=0 \text{ da } X,Y \text{ unabh.}} + b^2V(Y)$$
$$= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

daher ist $Z \sim N(a\mu_X + b\mu_Y + c, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$

Übungsblatt 9

Lösung: $Z \sim \mathcal{N}(0.015\,\mu_{G_{zul}} - 12.5\,\mu_{\rho LH} - 12 \cdot 12.5,\ 0.015^2\,\sigma^2_{G_{zul}} + 12.5^2\,\sigma^2_{\rho LH}) = \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

$p_f = P(Z<0) = \Phi\left(\frac{-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 0{,}00206551$