Kapitel 10

Bayes'sche Konzepte

10.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Der Begriff der *bedingten Wahrscheinlichkeit* ist zentral in der Bayes-Statistik, aber auch bei Ereignisbäumen und Bayes'schen Netzwerken. Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass Ergeignis B eingetreten ist, ist

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Dabei ist $P(B) \neq 0$ vorauszusetzen. (Wir erinnern an die Notationen $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ für die Und-Verknüpfung bzw. Oder-Verknüpung der beiden Ereignisse A und B sowie die Notation A^c für das Komplementärereignis aus Abschnitt 4.2.)

Es ergibt sich die *Multiplikationsformel*

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Beispiel 10.1 Die Wahrscheinlichkeit eines Geräteschadens (Ereignis A) durch Hochwasserüberflutung einer Baugrube soll ermittelt werden. Die Baugrubensicherung sei auf ein fünfzigjähriges Hochwasser bemessen (Ereignis B, $P(B) = 2\%$). Geräteschaden tritt auf, wenn aufgrund fehlender Vorwarnung die Geräte nicht rechtzeitig aus der Baugrube entfernt werden können. Aus Erfahrung sei bekannt, dass der meteorologische Dienst in 60% der Hochwasserereignisse eine rechtzeitige Vorwarnung liefert. Somit ist die Wahrscheinlichkeit eines Geräteschadens, falls Hochwasser auftritt, gleich

$$P(A|B) = 0.4.$$

Wir erhalten für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Hochwasser mit Geräteschaden" somit

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.02 = 0.008 \sim 0.8\%.$$

Der Bayes'schen Parameterschätzung liegt der einfache, aber wichtige *Satz von Bayes* zu Grunde. Den Satz erhält man durch Kombination der beiden Beziehungen

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Satz 10.2 (Satz von Bayes) Für Ereignisse A, B mit $P(A) \neq 0$ gilt:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Aus den Rechenregeln für die Ereignisalgebra folgt

$$P(A) = P\big(A \cap (B \cup B^{\mathsf{c}})\big) = P\big((A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}})\big) = P(A \cap B) + P(A \cap B^{\mathsf{c}}).$$

Einsetzen der Multiplikationsformel oben ergibt:

Satz 10.3 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit) Es gilt:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^{\mathsf{c}})P(B^{\mathsf{c}}).$$

Schließlich kann die Multiplikationsformel auf mehrere Ereignisse ausgeweitet werden:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) \\ &= P(A|B)P(B|C)P(C) \\ &= P(A|B)P(B|C)P(C|D)P(D) \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

10.2 Bayes'sche Parameterschätzung

Der Bayes'sche Ansatz hat zum Ziel, vorhandene *Vorinformationen* (Expertenwissen) mit *aktuellen Messdaten* zu kombinieren, um eine verbesserte Schätzung für die Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erzielen. Alle Wahrscheinlichkeiten werden *subjektivistisch*, also als Vertrauensgrade, aufgefasst.

Gegeben sei eine Zufallsgröße X mit einer Verteilungsfunktion, die von einem oder mehreren Parametern abhängt, etwa mit θ bezeichnet. Grundsatz des Bayesansatzes ist, dass *alles* als Zufallsgröße aufgefasst wird, somit auch der Parameter θ. Dieser besitzt also seinerseits eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die wir kurz mit $p(\theta)$ bezeichnen. (Eine präzisere Formulierung, unterschieden nach diskretem und kontinuierlichem Fall, folgt unten.) Die Verteilung $p(\theta)$ wird als *A-priori-Verteilung* bezeichnet und dazu verwendet, um die Vorinformationen zu beschreiben.

In einer Messung sei eine Realisierung ξ der Zufallsgröße X festgestellt worden. Wir wollen dieses Ergebnis mit der Vorinformation kombinieren, und erhalten damit die *A-posteriori*-Verteilung $p(\theta|\xi)$. Das Bayes'sche Theorem besagt:

$$p(\theta|\xi) \;=\; \frac{p(\xi|\theta)\,p(\theta)}{p(\xi)}$$

wobei sich $p(\xi)$ nachträglich durch die Forderung, dass $\int p(\theta|\xi)\,\mathrm{d}\theta = 1$ sein muss, berechnen lässt. Man schreibt oft der Einfachheit halber

$$p(\theta|\xi) \;\propto\; p(\xi|\theta)\,p(\theta),$$

das heißt, die linke Seite ist proportional zur rechten Seite.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(\xi|\theta)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert ξ annimmt, wenn der Verteilungsparameter Θ gleich θ ist. Sie wird als *Likelihoodfunktion* oder *Plausibilitätsfunktion* bezeichnet. Falls nicht nur ein Messwert sondern eine Stichprobe $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vorliegt, so sind die einzelnen Werte unabhängig und daher die Likelihoodfunktion das Produkt der einzelenen Wahrscheinlichkeiten:

$$p(\boldsymbol{\xi}|\theta) = p(\xi_1|\theta)p(\xi_2|\theta)\ldots p(\xi_n|\theta) = \prod_{j=1}^{n} p(\xi_j|\theta).$$

Wir präzisieren die Vorgangsweise im diskreten und kontinuierlichen Fall.

Fall 1: Die Zufallsgrößen X und Θ sind beide diskret. Dann handelt es sich in der Bayes'schen Formel um gewöhnliche Punktwahrscheinlichkeiten:

$$P(\Theta = \theta | X = \xi) \;\propto\; P(X = \xi | \Theta = \theta)\, P(\Theta = \theta)$$

bzw. im Falle des Vorliegens einer Stichprobe

$$P(\Theta = \theta | \boldsymbol{\xi}) \;\propto\; \prod_{j=1}^{n} P(X = \xi_j | \Theta = \theta)\, P(\Theta = \theta).$$

Fall 2: X ist diskret und Θ kontinuierlich. Dann sind die $P(X = \xi | \Theta = \theta)$ Punktwahrscheinlichkeiten, aber $p(\theta | X = \xi)$ ist eine (so genannte bedingte) Wahrscheinlichkeitsdichte; auch die A-priori-Verteilung ist durch eine Dichte gegeben:

$$p(\theta | X = \xi) \;\propto\; P(X = \xi | \Theta = \theta)\, p(\theta)$$

bzw. im Falle des Vorliegens einer Stichprobe

$$p(\theta | \boldsymbol{\xi}) \;\propto\; \prod_{j=1}^{n} P(X = \xi_j | \Theta = \theta)\, p(\theta).$$

Beispiel 10.4 Der Fall einer Alternativverteilung. Es sei zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses „Kopf" bei einem Münzwurf zu beurteilen. Die Zufallsgröße X hat demnach die Werte $X = 1$ mit Wahrscheinlichkeit θ und $X = 0$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \theta$. Der Parameter θ kann jedenfalls Werte zwischen 0 und 1 annehmen und ist daher eine kontinuierliche Zufallsgröße.

Bei einem einzelnen Münzwurf ($\xi = 0$ oder $\xi = 1$) erhalten wir folgende Likelihoodfunktionen:

$$P(X = 1|\Theta = \theta) = \theta \quad \text{bzw.} \quad P(X = 0|\Theta = \theta) = 1 - \theta.$$

Bei einer Stichprobe aus mehreren Würfen ist die Likelihoodfunktion das Produkt der einzelnen Trefferwahrscheinlichkeiten. Ist zum Beispiel $\boldsymbol{\xi} = (1, 0, 1, 1, 0)$ (mit $n = 5$), so ergibt sich

$$P(\boldsymbol{\xi}|\Theta = \theta) = \prod_{j=1}^{5} P(X = \xi_j|\Theta = \theta) = \theta^3(1 - \theta)^2.$$

Fall 3: Sowohl X als auch Θ sind kontinuierlich. Dann sind die Wahrscheinlichkeiten in der Bayes-Formel als Dichten zu interpretieren. Die Größen X und Θ besitzen eine gemeinsame Dichte $p(x, \theta)$ und Randdichten $p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \theta)\,\mathrm{d}\theta$, $p_\Theta(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \theta)\,\mathrm{d}x$. Die *bedingten Dichten* sind definiert als

$$p(x|\Theta = \theta) = \frac{p(x, \theta)}{p_\Theta(\theta)}, \qquad p(\theta|X = x) = \frac{p(x, \theta)}{p_X(x)}.$$

Die Bayes'sche Formel ist dann zu interpretieren als Aussage über die bedingten Dichten:

$$p(\theta|X = x) \;\propto\; p(x|\Theta = \theta)\,p(\theta) \quad \text{bzw.} \quad p(\theta|\boldsymbol{\xi}) \;\propto\; \prod_{j=1}^{n} p(\xi_j|\Theta = \theta)\,p(\theta).$$

Der Bayes-schätzer für den Parameter Θ: Der Bayes-schätzer für Θ ist der Erwartungswert der A-posteriori-Verteilung:

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta} \;=\; \mathrm{E}(\Theta|\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=1}^{k} \theta_i P(\Theta = \theta_i|\boldsymbol{\xi}), && \ldots \quad \Theta \in \{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \text{ diskret} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\theta, && \ldots \quad \Theta \in \mathbb{R} \text{ kontinuierlich}
\end{aligned}$$

Beispiel 10.5 Wir setzen Beispiel 10.4 fort und wollen die A-posteriori-Verteilung in verschiedenen Fällen ermitteln. Zunächst zur Wahl der A-priori-Verteilung. Erahrungen mit Münzwürfen legen nahe, dass der Parameter θ, etwa bei Centmünzen, zwischen 0.4 und 0.6 liegt. Nehmen wir aber an, dass wir *keine* Vorinformation haben, so modellieren wir dies durch eine Gleichverteilung für den Parameter θ im Intervall $[0, 1]$ (andere Werte kommen nicht in Frage), also

$$p(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq 1, \\ 0, & \theta < 0 \text{ oder } \theta > 1. \end{cases}$$

Nehmen wir nun an, wir machen einen Münzwurf mit dem Ausgang $\xi = 1$. Nach dem Bayes'schen Theorem ergibt sich für die A-posteriori-Verteilung

$$p(\theta|X = 1) \;\propto\; p(X = 1|\theta)p(\theta) = \theta p(\theta),$$

das heißt,

$$p(\theta|X = 1) = \begin{cases} c\,\theta, & 0 \leq \theta \leq 1, \\ 0, & \theta < 0 \text{ oder } \theta > 1. \end{cases}$$

Die Konstante c erhält man aus der Bedingung

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta|X = 1)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 c\,\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{c}{2}$$

zu $c = 2$. Die A-posteriori-Verteilung für den Parameter θ ist somit eine Dreiecksverteilung.

Der Bayes-Schätzer für θ ist der Erwartungswert von Θ gemäß der A-posteriori-Verteilung, also

$$\widehat{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta | X = 1)\, \mathrm{d}\theta = \int_0^1 2\theta^2\, \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\,.$$

Für den a-priori nicht vorinformierten Bayesianer ergibt sich also nach einem Münzwurf mit Ergebnis „Kopf", dass die Münze als gezinkt zu betrachten ist mit Wahrscheinlichkeit von 2/3 für einen Kopfwurf.

Die Formulierung ist etwas überspitzt, um das Grundprinzip herauszuarbeiten. Selbstverständlich wird auch ein Bayesianer die Münze mehrmals werfen, also seine A-posteriori-Verteilung aktualisieren („updating"). Ist die Münze ungezinkt und die Priorverteilung nicht einengend, so konvergieren die weiteren A-posteriori-Verteilungen zum frequentistischen Schätzer $\widehat{\theta} = 1/2$. Der Vorteil der Bayes-Methode ist allerdings, dass sie im Gegensatz zur frequentistischen Methode schon bei *kleinen Stichproben* plausible Aussagen machen kann.

Beispiel, fortgesetzt: Nehmen wir an, die Münze wurde fünfmal geworfen mit Ergebnis $\boldsymbol{\xi} = (1, 0, 1, 1, 0)$. Die A-posteriori-Dichte ist

$$p\big(\theta|\boldsymbol{\xi}) = (1, 0, 1, 1, 0)\big) = c\,\theta^3(1-\theta)^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Die Konstante c erhält man zu $c = 60$ aus

$$1 = c\int_0^1 \theta^3(1-\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{c}{60}.$$

Die Posteriorverteilung ist somit eine Betaverteilung mit Dichte

$$p\big(\theta|\boldsymbol{\xi}) = (1, 0, 1, 1, 0)\big) = 60\,\theta^3(1-\theta)^2, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Der Bayes-Schätzer für θ ist nunmehr

$$\widehat{\theta} = 60\int_0^1 \theta^4(1-\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{7}.$$

Um den Effekt der A-priori-Verteilung vorzuführen, nehmen wir (sinnvollerweise) eine Verteilung, die mehr in der Nähe von $\theta = 1/2$ konzentriert ist, ist zum Beispiel eine Betaverteilung $p(\theta) \propto \theta(1-\theta)$. Mit dem Stichprobenergebnis $\boldsymbol{\xi} = (1,0,1,1,0)$ gilt dann

$$p(\theta|\boldsymbol{\xi}) \;\propto\; p(\boldsymbol{\xi}|\Theta = \theta) \cdot p(\theta) \;\propto\; \theta^3(1-\theta) \cdot \theta(1-\theta) = \theta^4(1-\theta)^3.$$

Die A-posteriori-Verteilung ist demnach ebenfalls eine Betaverteilung mit Parametern $r-1 = 4$, $s-1 = 3$. Deren Erwartungswert ist nach einer allgemeinen Formel für Betaverteilungen gleich

$$\mathrm{E}(\Theta|\boldsymbol{\xi}) = \frac{r}{r+s} = \frac{5}{8}.$$

Der damit gewonnene Schätzer $\widehat{\theta} = 5/8$ liegt näher bei $1/2$ als jener mit einer A-priori-Gleichverteilung.

Diese kurze Einführung in die mittlerweile hoch entwickelte Bayes-Statistik möge genügen. Für weitere Informationen siehe Viertl(2003).

10.3 Subjektive Wahrscheinlichkeiten

Im Zuge der Projektplanung, aber auch bei der Beurteilung von Eingansgrößen in der Bemessung, sind die Eintrittswahrscheinlichkeiten oder die Verteilungen von Zufallsgrößen häufig durch persönliche Beurteilung durch die Bearbeiter oder Experten festzulegen. Dies trifft insbesondere auf die Wahl der A-priori-Verteilung bei der Bayes'schen Parameterschätzung zu.

In der Anfangsphase eines Projekts fehlen einerseits oft statistische Daten, etwa in Form von Bodenproben oder Laborversuchen, andererseits geht es in der Projektplanung um einen zukünftigen Zustand oder ein Risiko, das erst unter zukünftigen Bedingungen zum Tragen kommt. In solchen Fällen muss die Zuweisung von Wahrscheinlichkeitswerten – nach bestem Wissensstand – durch Abwägung und Diskussion erfolgen. Die Wahrscheinlichkeitstheorie spricht von *subjektiven Wahrscheinlichkeiten* und es sind eine Reihe Vorgangsweisen zu ihrer Interpretation und zu ihrer Ermittlung entwickelt worden.

In der subjekivistischen Interpretation wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A als Vertrauensgrad in sein Auftreten gedeutet. Hier wird bewusst in Kauf genommen, dass dieser Vertrauensgrad eine subjektive Einschätzung bedeutet und daher von verschiedenen Experten verschiedene Werte zugewiesen bekommen kann. Selbstverständlich muss die Bewertung rational und unter Zuhilfenahme aller verfügbaren Information erfolgen.

Um eine operative Methode zu erhalten, den subjektiven Vertrauensgrad zu quantifizieren, wurde von Savage(1954) vorgeschlagen, diesen als Indifferenzpreis für ein gedachtes Wettspiel anzusetzen. Das Spiel ergebe einen Gewinn von 1, falls A auftritt, und von 0, falls A nicht auftritt. Dann ist

$$\begin{aligned} P(A) &= \text{Indifferenzpreis für das Spiel } = \\ \overline{P}(A) &= \text{maximaler Kaufpreis } = \\ \underline{P}(A) &= \text{minmaler Verkaufspreis.} \end{aligned}$$

Soll zum Beispiel die Erfolgswahrscheinlichkeit einer Alternativverteilung beurteilt werden, also etwa bei einem Münzwurf die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A =$ „Kopf“, so würde das Wettspiel in einem Münzwurf bestehen mit der Gewinnausschüttung von 1.00 Euro, falls „Kopf“ auftritt. Sie wären vermutlich interessiert, diese Wette um einen Einsatz von 0.00, 0.10, 0.20 Euro zu kaufen; bei einem Kaufpreis von 1.00, 0.90, 0.80 Euro wären Sie wahrscheinlich nicht interessiert, einzusteigen. Schwieriger wird es schon bei einem Kaufpreis von 0.45 oder 0.55 Euro. Wenn Sie die Münze für ungezinkt halten, werden Sie das Kaufinteresse voraussichtlich genau bei 0.50 Euro verlieren, das heißt, es wird für Sie egal sein, ob Sie mitwetten oder nicht. Dies ist also Ihr Indifferenzpreis, und damit ist Ihre subjektive Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von „Kopf“ gerade $P(A) = 0.5$.

Diese Vorgangsweise wird *Introspektion* genannt. Wichtiger für die Risikoanalyse ist allerdings die Expertenbefragung, auch *Mediation, Delphi-Methode* oder auf Englisch *elicitation* genannt. Dabei werden Einzelwahrscheinlichkeiten und Verteilungsfunktionen in einem Diskussionsprozess festgelegt. Es können dabei unter anderem

- statistische Daten,
- Erfahrungswerte, Normwerte,
- Bewertungstabellen,
- Ereignisbäume

herangezogen werden.

Ein Beispiel einer der Bewertungstabellen ist etwa die Sherman-Kent-Skala, mit deren Hilfe qualitativen Wahrscheinlichkeiten quantitative Wertebereiche zugeordnet werden können; Abbildung 10.3, aus Meyer et al. (2001):

Sherman Kent rating scale

Order Of Likelihood	Synonyms	Chances In 10	Percent (%)
			99%
Nearly Certain	Virtually (almost) We are convinced Highly probable Highly likely	9	
		8	80%
Probable	Likely We believe We estimate Chances are good It is probable	7	
		6	60%
Even Chance	Chances are slightly better than Chances are about even Chances are slightly less than	5	
		4	40%
Improbable	Probably not Unlikely We believe not	3	
		2	20%
Nearly Impossible	Almost impossible Only a slight chance Highly doubtful	1	10%

Beispiel: Bestimmung einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die folgende Vorgangsweise wurde von O'Hagan(1998) vorgeschlagen. Es soll die Verteilung einer Zufallsgröße, etwa einer Schadenssumme S, eruiert werden. Dazu müssen die Experten zunächst eine untere Grenze U und eine obere Grenze O sowie den Modalwert (häufigsten Wert) M festlegen. Anschließend werden sie angehalten, die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Intervalle anzugeben:

(a) $[U, M]$,

(b) $[U, (U + M)/2]$,

(c) $[(M + O)/2, O]$,

(d) $[U, (U + 3M)/4]$,

(e) $[(3M + O)/4, O]$.

Es wurden zum Beispiel die folgenden Grenzen angegeben:

$$U = 165,\ M = 190,\ O = 250.$$

Die von O'Hagan vorgeschlagenen Intervalle wurden mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten versehen:

(a) $[165, 190] : P = 0.500$,

(b) $[165, 177.5] : P = 0.175$,

(c) $[220, 250] : P = 0.050$,

(d) $[165, 183.75] : P = 0.330$,

(e) $[205, 250] : P = 0.250$.

Daraus errechnen sich die Wahrscheinlichkeiten der nicht überlappenden Teilintervalle laut Tabelle unten:

Intervall	Klassenmitte z_j	Wahrscheinlichkeit p_j	Histogrammhöhe
$[165, 177.5]$	171.250	0.175	0.0140
$[177.5, 183.75]$	180.625	0.155	0.0248
$[183.75, 190]$	186.875	0.170	0.0272
$[190, 205]$	197.500	0.250	0.0167
$[205, 220]$	212.500	0.200	0.0133
$[220, 250]$	235.000	0.050	0.0017

Im nächsten Schritt wird nun eine Verteilungsfunktion angepasst. Wir nehmen in diesem Fall eine Lognormalverteilung $\mathcal{L}og\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wir berechnen dazu Mittelwert und Varianz des Logarithmus der Klassenmitten als Schätzung, also

$$\mu \approx \sum_j \log z_j \, p_j \approx 5.2609 \, .$$

Ebenso ergibt sich die Varianz zu

$$\sigma^2 \approx \sum_j (\log z_j - \mu)^2 \, p_j \, ; \;\; \sigma \approx 0.0853 \, .$$

Das Histogramm mit der angepassten Lognormalverteilung ist in Abbildung 10.3 (links) abgebildet. Da die angepasste Verteilung die Schiefe des Histogramms nicht gut wiedergibt, machen wir noch einen Durchgang („stepping back“) und versuchen, eine verschobene Lognormalverteilung anzupassen. Das Histogramm legt nahe, um 150 nach links zu verschieben. Wir passen daher eine Lognormalverteilung an die verschobenen Klassenmitten $z_j - 150$ an; die Berechnung erfolgt wie oben und gibt nunmehr ein befriedigendes Modell der Verteilung der Schadenssumme – vgl. Abbildung 10.3 (rechts).

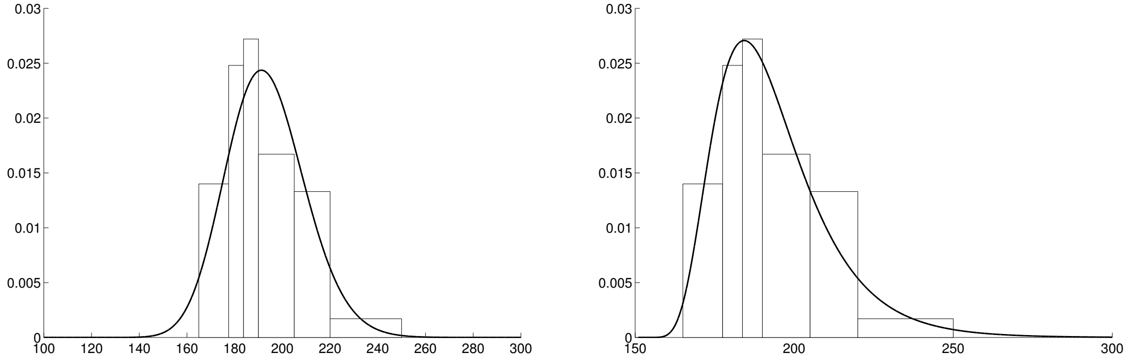


Abbildung 10.1: Angepasste zweiparametrige (links) und dreiparametrige (rechts) Lognormalverteilung.

10.4 Ereignisbäume

Ereignisbäume ermöglichen die Berücksichtigung von Abhängigkeiten von Ereignissen untereinander, zum Beispiel kausaler Zusammenhänge oder zeitlicher Abfolgen. Der Baum besteht aus Knoten (den Ereignissen) und Kanten, die die Zusammenhänge darstellen. Die Kanten können mit Bewertungen versehen werden (zum Beispiel Schadenskosten), die Verzweigungen an den Knoten können mit Wahrscheinlichkeiten versehen werden. Ist der Baum aufgebaut, so können die Gesamtbewertungen an den Knospen (Enden) additiv, die dazugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten multiplikativ berechnet werden (statistische Unabhängigkeit der Äste vorausgesetzt).

Beispiel 10.6 Es soll das Schadensrisiko durch Hochwasser während des Baus eines Erddamms in einem Hochgebirgstal abgeschätzt werden, und zwar in seinen Auswirkungen auf die Baukosten und auf die Bauzeit. Das vorliegende Beispiel befasst sich mit der Baustelle Moosbach/Kartell und wurde 2004 bearbeitet[1].

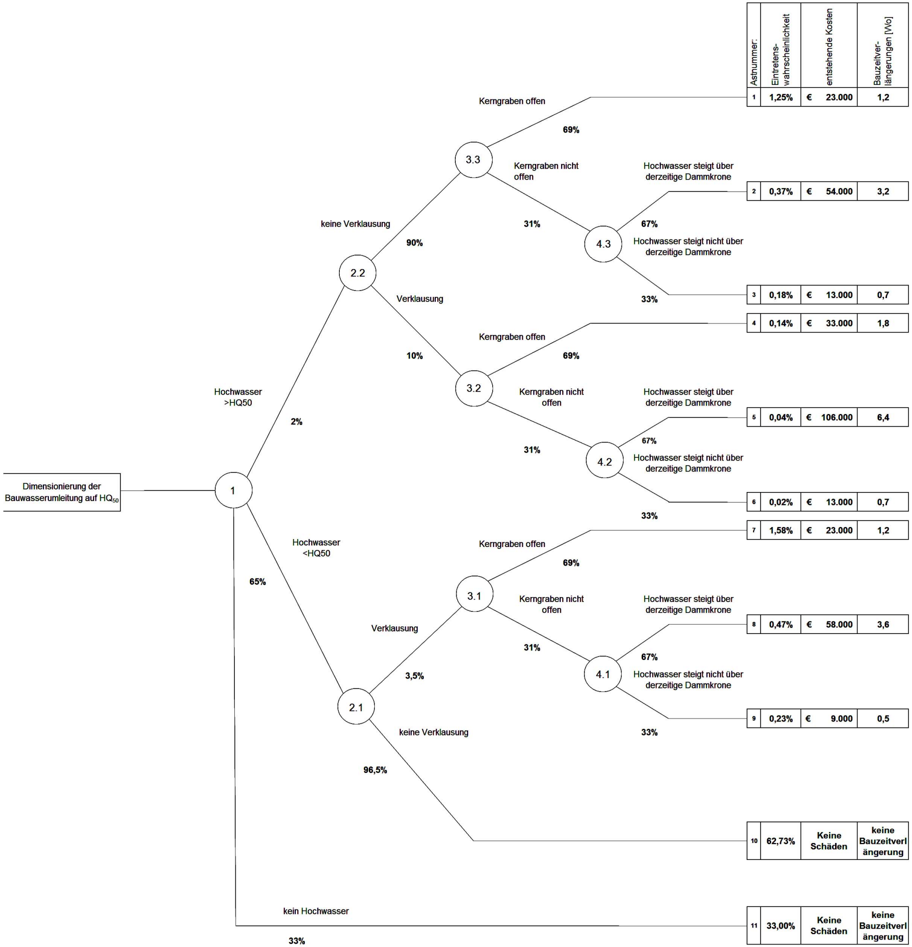
Für die Schüttphase des Damms wurde eine Bauwasserumleitung auf HQ50 dimensioniert. Betrachtete Risiken waren:

---

[1]Mathematische Methoden im Baubetrieb und Risikoanalyse, Universität Innsbruck, Bearbeitung durch M. Nitsch und A. Strolz.

- Verklausung des Umleitungsstollens;
- Bauzustand des Damms (Kerngraben offen/nicht offen);
- Beschädigung der Dammkrone.

Die kausalen Zusammenhänge wurden mit Hilfe eines Ereignisbaums dargestellt (gesamter Baum in Abbildung 10.6, Ausschnitt in Abbildung 10.6).


Astnummer:
Eintretens-wahrscheinlichkeit
entstehende Kosten
Bauzeitver-längerungen [Wo]
Dimensionierung der Bauwasserumleitung auf HQ50
1
Hochwasser >HQ50
2%
2.2
keine Verklausung
90%
3.3
Kerngraben offen
69%
1 1,25% € 23.000 1,2
Kerngraben nicht offen
31%
4.3
Hochwasser steigt über derzeitige Dammkrone
67%
2 0,37% € 54.000 3,2
Hochwasser steigt nicht über derzeitige Dammkrone
33%
3 0,18% € 13.000 0,7
Verklausung
10%
3.2
Kerngraben offen
69%
4 0,14% € 33.000 1,8
Kerngraben nicht offen
31%
4.2
Hochwasser steigt über derzeitige Dammkrone
67%
5 0,04% € 106.000 6,4
Hochwasser steigt nicht über derzeitige Dammkrone
33%
6 0,02% € 13.000 0,7
Hochwasser <HQ50
65%
2.1
Verklausung
3,5%
3.1
Kerngraben offen
69%
7 1,58% € 23.000 1,2
Kerngraben nicht offen
31%
4.1
Hochwasser steigt über derzeitige Dammkrone
67%
8 0,47% € 58.000 3,6
Hochwasser steigt nicht über derzeitige Dammkrone
33%
9 0,23% € 9.000 0,5
keine Verklausung
96,5%
10 62,73% Keine Schäden keine Bauzeitverlängerung
kein Hochwasser
33%
11 33,00% Keine Schäden keine Bauzeitverlängerung

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Verzweigungen an den jeweiligen Knoten müssen nun Schritt für Schritt festgelegt werden. Beispielhaft seien drei Knoten herausgegriffen. Im Knoten 1 tritt eine Verzweigung für das Eintreten von HQ50 auf; die Eintretenswahrscheinlichkeit davon ist selbstverständlich gleich 2%. Im Falle des Nichteintretens eines HQ50 wurde eine weitere Unterscheidung vorgenommen, mit subjektiv abgeschätzten Wahrscheinlichkeitswerten (siehe Abbildung 10.6). Die Summe der Wahrscheinlichkeiten am Knoten muss gleich 1 sein bzw. 100% entsprechen.

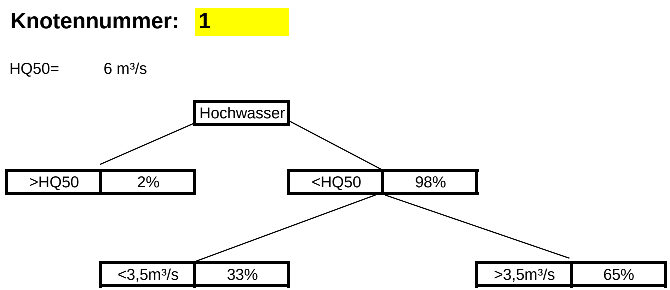


Abbildung 10.4: Ermittlung des Hochwasserrisikos am Knoten 1.

Am Knoten 2.2 wurden die Verklausungswahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Rängen ermittelt, die die Wichtigkeit der möglichen Ursachen bewertet (Abbildung 10.6). Die Bewertung des Bauzustands offener/verbauter Kerngraben wurde anhand der Bauzeitverteilung im Jahresablauf ermittelt (Abbildung 10.6).

Als Beispiel der Ermittlung der Auswirkung auf Kosten und Bauzeit sei beispielhaft der Knoten 3.1 herangezogen. Hier sind entsprechend baubetriebliche Grundsätze anzuwenden; dies wurde in der Tabelle in Abbildung 10.6 durchgeführt.

Knoten:	**3.1**	**Kerngraben offen**					**<HQ50**
		nicht gesamte Länge des Kontrollganges in Massenberechnung enthalten (Bauablauf)					
Abgetragenes Volumen:				1200,00	m³		
Beschädigtes Dammvolumen:				300,00	m³		
Zu entfernendes und neu zu schüttendes Volumen:				**1500,00**	m³		
	EHP	Masse	Pos.Preis				
Ausbaggern+Transp	3,16	1500,00	4740,00				
Wiedereinbau	0,95	1500,00	1425,00				
Vorhaltekosten	41914,99	0,30	12574,50				
Regieanteile:			4000,00		höher, da händische Aushubarbeiten tw. notwendig		
	Schadenssumme:		**€ 22.739,50**				
Bauzeitverlängerung:		**6,0**	**Tage**				
		1,2	**Wochen**				

Abbildung 10.7: Ermittlung der Auswirkung des Risikos *offener Kerngraben* am Knoten 3.1.

Die Gesamtbewertung des Risikos erhält man durch statistische Auswertung der Kosten/Bauzeitverlängerung mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Erste Indikatoren sind der Erwartungswert der Schadenssumme/Bauzeitverlängerung und die Varianz. Ein deutlicheres Bild der Risikoverteilung liefert ein Histogramm.

Genauer: Die Verzweigungswahrscheinlichkeiten am Startknoten sind gewöhnliche Wahrscheinlichkeiten. An den späteren Knoten handelt es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten (jeweils unter der Bedingung, dass der entsprechende Knoten erreicht wurde). Verfolgt man einen Zweig i vom Startknoten bis zum Endknoten, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit p_i, den Endknoten zu erreichen, nach der Multiplikationsformel (Abschnitt 10.1) als Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Zweigs. Die Bewertung x_i erhalt man als Summe der Kantenbewertungen längs des Zweigs. Alle m Endknoten gemeinsam stellen eine diskrete Zufallsgröße X mit Ausprägungen $x_1, \ldots, x_m$ und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_m$ dar. Deren Erwartungswert ist

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i.$$

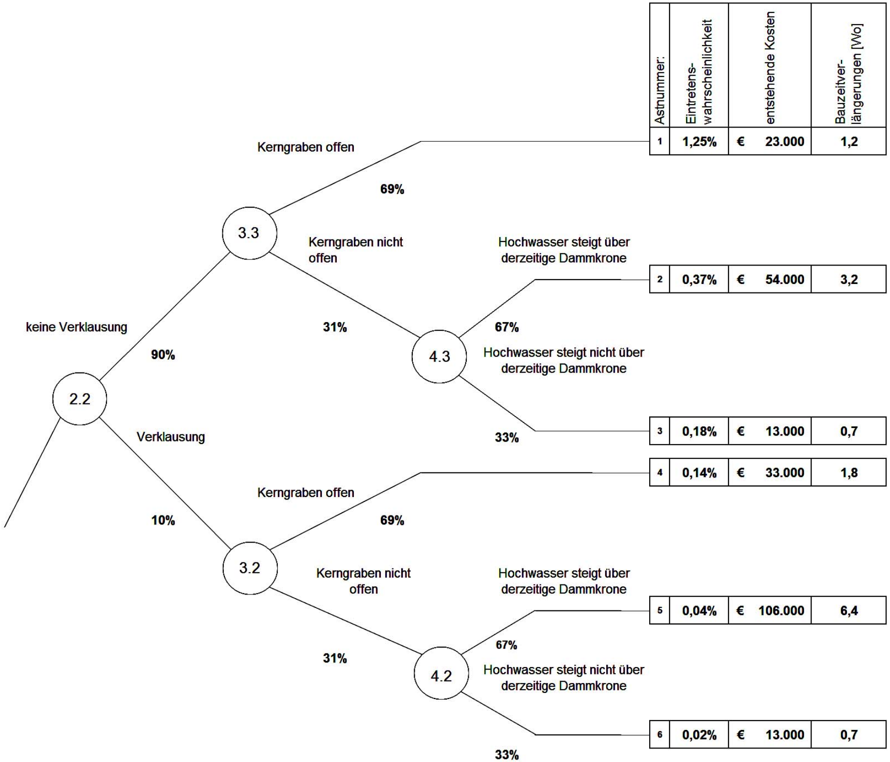


Abbildung 10.3: Ausschnitt aus dem Ereignisbaum.

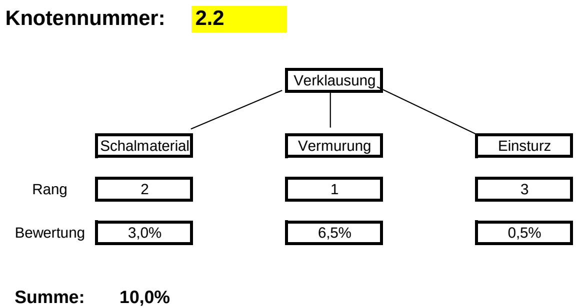


Abbildung 10.5: Ermittlung des Verklausungsrisikos am Knoten 2.2.

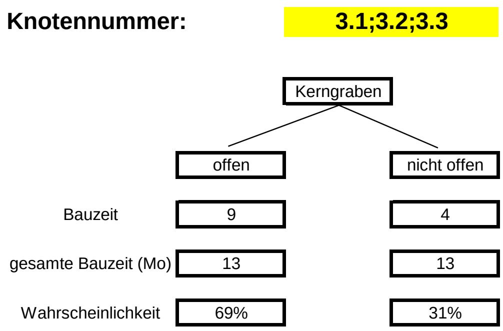


Abbildung 10.6: Wahrscheinlichkeit für offenen Kerngraben bei Hochwassereintritt.