

# MATHEMATIK 2

Kurven

Integralsätze

Differentialgleichungen

Bachelorstudium Bau- und Umweltingenieurwissenschaften

Bachelorstudium Elektrotechnik

Bachelorstudium Mechatronik

Skriptum

Sommersemester 2022

Arbeitsbereich für Technische Mathematik  
Institut für Grundlagen der Technischen Wissenschaften  
Universität Innsbruck

## **Autoren:**

Michael Oberguggenberger

Arbeitsbereich für Technische Mathematik

Institut für Grundlagen der Technischen Wissenschaften

Universität Innsbruck

Alexander Ostermann

Institut für Mathematik

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik

Universität Innsbruck

# Inhaltsverzeichnis

<b>4</b>	<b>Kurven</b>	<b>1</b>
4.1	Kurven in der Ebene . . . . .	1
4.1.1	Beispiele ebener Kurven . . . . .	1
4.1.2	Das begleitende Zweibein . . . . .	7
4.1.3	Bogenlänge und Krümmung . . . . .	8
4.2	Kurven im Raum . . . . .	13
4.2.1	Das begleitende Dreibein . . . . .	13
4.2.2	Bogenlänge und Krümmung von Raumkurven . . . . .	15
4.2.3	Torsion . . . . .	16
4.3	Kurvenintegrale . . . . .	17
4.3.1	Kurvenintegrale erster Art . . . . .	17
4.3.2	Kurvenintegrale zweiter Art . . . . .	18
4.3.3	Potentialfelder . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Die Integralsätze von Gauß und Green</b>	<b>25</b>
5.1	Hydromechanische Herleitung . . . . .	25
5.2	Beweis der Integralsätze . . . . .	28
5.3	Anwendungen der Integralsätze . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Oberflächenintegrale und der Satz von Stokes</b>	<b>35</b>
6.1	Flächen im Raum . . . . .	35

6.2	Oberflächenintegrale . . . . .	38
6.2.1	Oberflächenintegrale erster Art . . . . .	39
6.2.2	Oberflächenintegrale zweiter Art . . . . .	41
6.3	Die Integralsätze von Stokes und Gauß im Raum . . . . .	43
6.3.1	Der Satz von Stokes . . . . .	43
6.3.2	Der Satz Gauß im Raum . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>49</b>
7.1	Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	49
7.1.1	Separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	50
7.1.2	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	53
7.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	56
7.2.1	Die allgemeine lineare Gleichung zweiter Ordnung . . . . .	56
7.2.2	Darstellung im Phasendiagramm . . . . .	64
7.2.3	Die Pendelgleichung . . . . .	66
7.2.4	Lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung . . . . .	70
7.3	Lineare Systeme zweiter Ordnung . . . . .	73
7.3.1	Der ungedämpfte lineare Zweimassenschwinger . . . . .	73
7.3.2	Der lineare Zweimassenschwinger mit Dämpfung . . . . .	77
7.4	Allgemeine lineare Systeme im Zustandsraum . . . . .	78
7.4.1	Lösung mittels Matrixexponentialfunktion . . . . .	79
7.4.2	Stabilität . . . . .	83
<b>8</b>	<b>Fourierreihen</b>	<b>85</b>
8.1	Fouriersinusreihen . . . . .	86
8.2	Allgemeine Fourierreihen . . . . .	88
8.3	Fourierreihen und gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	90
8.4	Eine Anwendung auf die Poissongleichung . . . . .	91

8.5	Eine Anwendung auf die Diffusionsgleichung . . . . .	94
<b>9</b>	<b>Ergänzungen zur Analysis</b>	<b>98</b>
9.1	Uneigentliche Integrale . . . . .	98
9.2	Die Transformationsformel für Bereichsintegrale . . . . .	101
9.3	Numerische Berechnung von Nullstellen . . . . .	104
9.3.1	Das Bisektionsverfahren . . . . .	104
9.3.2	Das Newtonverfahren . . . . .	106

# Kapitel 4

## Kurven

### 4.1 Kurven in der Ebene

Der Graph einer Funktion  $y = f(x)$  stellt eine Kurve in der Ebene dar. Dieses Konzept ist jedoch zu eng, um komplexere Kurvenverläufe darzustellen, etwa Schleifen und Überschneidungen. Ziel dieses Kapitels ist es, das Konzept parametrisierter Kurven einzuführen und speziell den Fall differenzierbarer Kurven zu studieren. Für die Visualisierung des Kurvenverlaufs sind die Begriffe des Geschwindigkeitsvektors, des begleitenden Zweibeins und der Krümmung wichtig. Kurven sind in der Mechanik wichtig als Bahnen bewegter Massenpunkte. Neben rein geometrischen Anwendungen dienen sie aber auch zur Beschreibung der Ränder ebener Gebiete und haben damit in der Festigkeitslehre Bedeutung.

#### 4.1.1 Beispiele ebener Kurven

**Definition 4.1** Eine *parametrisierte ebene Kurve* ist eine stetige Abbildung

$$t \rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

eines Intervalls  $[a, b]$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Dabei heißt  $t \in [a, b]$  der *Kurvenparameter*.

Wir verlangen also, dass beide Komponentenabbildungen  $t \rightarrow x(t)$  und  $t \rightarrow y(t)$  stetig sind<sup>1</sup>.

**Beispiel 4.2** Ein in Höhe  $h$  mit Horizontalgeschwindigkeit  $v_H$  und Vertikalgeschwindig-

---

<sup>1</sup>Zur Notation ist zu bemerken, dass  $x(t), y(t)$  eigentlich die Koordinaten eines Punkts im  $\mathbb{R}^2$  als Punktraum darstellen. Es ist jedoch günstig und üblich, die Bezeichnung als Ortsvektor, also die Spaltenschriftweise, zu benützen.

keit  $v_V$  geworfener Körper besitzt die Bahnkurve

$$\begin{aligned}x(t) &= v_H t, \\ y(t) &= h + v_V t - \frac{g}{2} t^2,\end{aligned}$$

$0 \leq t \leq t_0$ , wobei  $t_0$  die positive Lösung der Gleichung  $h + v_V t_0 - \frac{g}{2} t_0^2 = 0$  ist (Aufprallzeitpunkt, siehe Abb. 4.1). In diesem Beispiel können wir  $t$  eliminieren und die Bahnkurve als Funktionsgraph (Wurfparabel) darstellen. Es ist  $t = x/v_H$  und damit

$$y = h + \frac{v_V}{v_H} x - \frac{g}{2v_H^2} x^2.$$

**Beispiel 4.3** Ein Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius  $\rho$  besitzt die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}x(t) &= \rho \cos t, \\ y(t) &= \rho \sin t,\end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

In diesem Fall ist  $t$  als Winkel zwischen dem Ortsvektor und der  $x$ -Achse interpretierbar (Abb. 4.1). Die Komponenten  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  erfüllen die Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

jedoch kann man die Kreislinie nicht in ihrer Gesamtheit als Funktionsgraphen darstellen.

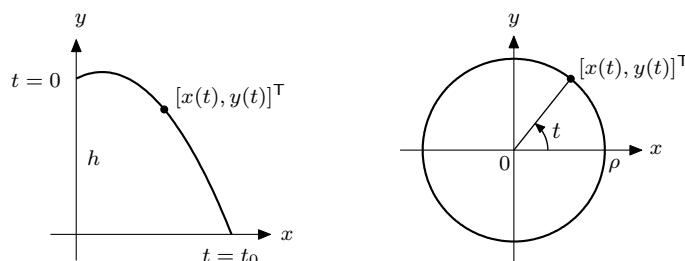


Abbildung 4.1: Wurfparabel und Kreislinie.

Man kann Kurven statisch als Punktmenge in der Ebene oder dynamisch als Verlauf der Bewegung eines Punkts sehen. Beide Sichtweisen sind in den Anwendungen von Bedeutung.

**Der kinematische Standpunkt.** Hier fasst man den Kurvenparameter  $t$  als Zeit auf, die Kurve als Bahnkurve. Verschiedene Parametrisierungen desselben geometrischen Objekts sind dann verschiedene Kurven.

**Der geometrische Standpunkt.** Hier will man den geometrischen Ort, die Durchlauf-richtung und die Anzahl der Durchläufe als Grundeigenschaften einer Kurve festhalten, nicht jedoch die Parametrisierung. Eine streng monoton wachsende, stetige Abbildung eines Intervalls  $[\alpha, \beta]$  nach  $[a, b]$ ,

$$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$$

heißt *Parameterwechsel*. Die Kurve

$$\tau \rightarrow \boldsymbol{\xi}(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

heißt *Umparametrisierung* der Kurve

$$t \rightarrow \mathbf{x}(t), \quad a \leq t \leq b,$$

wenn sie aus dieser durch einen Parameterwechsel  $t = \varphi(\tau)$  hervorgeht, also

$$\boldsymbol{\xi}(\tau) = \mathbf{x}(\varphi(\tau))$$

ist. Beim geometrischen Standpunkt werden die parametrisierten Kurven  $\tau \rightarrow \boldsymbol{\xi}(\tau)$  und  $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$  identifiziert.

**Beispiel 4.4** Das Parabelstück

$$\Gamma : \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Umparametrisierungen sind etwa

$$\begin{aligned} \varphi : [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] &\rightarrow [-1, 1], & \varphi(\tau) &= 2\tau, \\ \psi : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1], & \psi(t) &= \tau^3, \end{aligned}$$

sodass also

$$\boldsymbol{\xi}(\tau) = \begin{bmatrix} 2\tau \\ 4\tau^2 \end{bmatrix}, \quad -\tfrac{1}{2} \leq \tau \leq \tfrac{1}{2}$$

und

$$\boldsymbol{\eta}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau^3 \\ \tau^6 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \tau \leq 1$$

geometrisch dieselbe Kurve darstellt. Jedoch ist

$$\chi : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], \quad \chi(\tau) = -\tau$$

keine Umparametrisierung und ergibt die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve

$$\boldsymbol{\zeta}(\tau) = \begin{bmatrix} -\tau \\ \tau^2 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \tau \leq 1.$$

**Algebraische Kurven.** Diese erhält man als Nullstellengebilde von Polynomen in zwei Variablen. Wir hatten als Beispiele bereits Parabel und Kreis

$$y - x^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - \rho^2 = 0.$$

Man kann auf diese Weise auch Spitzen und Schleifen erzeugen.



**Beispiel 4.5** Die Neil'sche<sup>2</sup> Parabel

$$y^2 - x^3 = 0$$

besitzt einen Spitzpunkt in  $x = y = 0$  (Abb. 4.2). Allgemein erhält man mittels

$$y^2 - (x + p)x^2 = 0, \quad p \in \mathbb{R}$$

algebraische Kurven, die für  $p > 0$  eine Schleife besitzen. Eine Parameterdarstellung ist etwa

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 - p, \\ y(t) &= t(t^2 - p), \end{aligned} \quad -\infty < t < \infty.$$

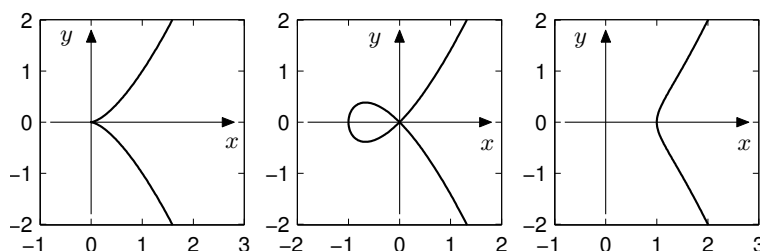


Abbildung 4.2: Neil'sche Parabel, die  $\alpha$ -Kurve und eine elliptische Kurve.

Wir werden uns im Folgenden vor allem mit Kurven befassen, die durch differenzierbare Parametrisierungen gegeben sind.

**Definition 4.6** Wenn eine ebene Kurve  $\Gamma : t \rightarrow \mathbf{x}(t)$  eine Parametrisierung besitzt, deren Komponentenabbildungen  $t \rightarrow x(t)$ ,  $t \rightarrow y(t)$  differenzierbar sind, so heißt  $\Gamma$  eine *differenzierbare Kurve*. Sind die Komponentenabbildungen  $k$ -mal differenzierbar, so wird  $\Gamma$  als  $k$ -mal differenzierbare Kurve bezeichnet.

Das Bild einer differenzierbaren Kurve muss nicht glatt im anschaulichen Sinne sein, sondern kann durchaus Spitzen oder Ecken besitzen, wie etwa Beispiel 4.5 zeigt.

**Beispiel 4.7** (Gerade und Halbstrahl) Die Parameterdarstellung

$$t \rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad -\infty < t < \infty$$

beschreibt eine Gerade durch den Punkt  $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]^T$  mit Richtungsvektor  $\mathbf{r} = [r_1, r_2]^T$ . Schränkt man den Parameter  $t$  auf den Bereich  $0 \leq t < \infty$  ein, so erhält man einen Halbstrahl. Die Darstellung

$$\mathbf{x}_H(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad -\infty < t < \infty$$

bewirkt zweimaliges Durchlaufen des Halbstrahls.

---

<sup>2</sup>W. Neil, 1637–1670.

**Beispiel 4.8** (Parameterdarstellung der Ellipse) Die Gleichung einer Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Eine Parameterdarstellung (einmaliges Durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn) erhält man mittels

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos t, \\ y(t) &= b \sin t, \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

wie durch Einsetzen in die Ellipsengleichung folgt. Die Bedeutung des Parameters  $t$  ist aus Abb. 4.3 ersichtlich.

**Beispiel 4.9** (Parameterdarstellung der Hyperbel) Zur Darstellung der Hyperbel verwenden wir den Sinus hyperbolicus und den Cosinus hyperbolicus. Aus der Identität

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

ersieht man, dass durch

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cosh t, \\ y(t) &= b \sinh t, \end{aligned} \quad -\infty < t < \infty$$

eine Parameterdarstellung des rechten Astes der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben ist (Abb. 4.4).

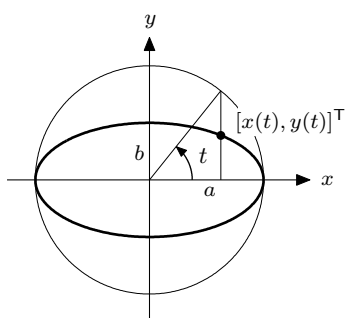


Abbildung 4.3: Parameterdarstellung der Ellipse.

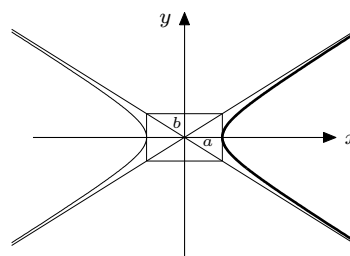


Abbildung 4.4: Parameterdarstellung des rechten Hyperbelastes.

**Ebene Kurven in Polarkoordinaten.** Durch Ansetzen der Parameterdarstellung in der Form

$$\begin{aligned} x &= r(t) \cos t, \\ y &= r(t) \sin t \end{aligned} \tag{4.1}$$

erhält man eine Vielzahl von Kurven. Der Kurvenparameter  $t$  entspricht jenem Winkel, den der Ortsvektor des Kurvenpunkts mit der positiven  $x$ -Achse einschließt, dem so genannten *Polarwinkel*. Der Radius  $r(t)$  entspricht dem Abstand des Kurvenpunkts vom Ursprung. Es ist dabei die Konvention in Kraft, negative Radien in Gegenrichtung des Strahls mit Winkel  $t$  aufzutragen. Man bezeichnet (4.1) als *Polardarstellung* der Kurve.

**Beispiel 4.10** (Spiralen) Die *Archimedische*<sup>3</sup> *Spirale* ist definiert durch

$$r(t) = t, \quad 0 \leq t < \infty,$$

die *logarithmische Spirale* durch

$$r(t) = e^t, \quad -\infty < t < \infty,$$

die *hyperbolische Spirale* durch

$$r(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t < \infty.$$

Typische derartige Spiralen sind in Abbildung 4.5 zu sehen.

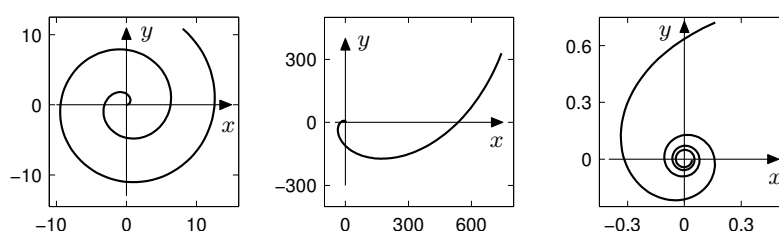


Abbildung 4.5: Archimedische, logarithmische und hyperbolische Spirale.

**Beispiel 4.11** (Schleifen) Diese erhält man mittels  $r(t) = \cos nt$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . In kartesischen Koordinaten lautet die Parameterdarstellung also

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos nt \cos t, \\ y(t) &= \cos nt \sin t. \end{aligned}$$

Für  $n = 1$  ergibt sich ein Kreis vom Radius  $\frac{1}{2}$  um  $(\frac{1}{2}, 0)$ , für ungerades  $n$  erhält man  $n$  Blätter, für gerades  $n$  erhält man  $2n$  Blätter, siehe Abb. 4.6.

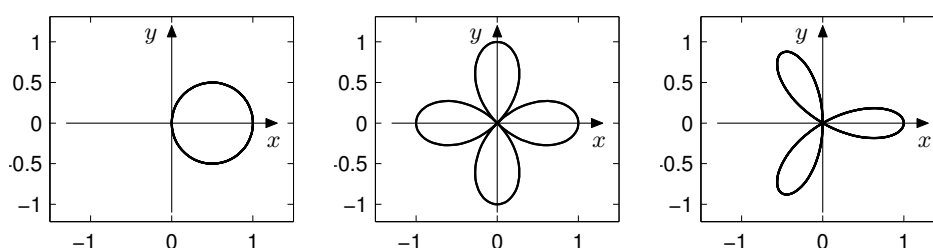


Abbildung 4.6: Schleifen mit  $r = \cos t$ ,  $r = \cos 2t$  und  $r = \cos 3t$ .

---

<sup>3</sup>Archimedes von Syrakus, 287–212 v.u.Z.

### 4.1.2 Das begleitende Zweibein

**Definition 4.12** Es sei  $\Gamma : t \rightarrow \mathbf{x}(t)$  eine differenzierbare Kurve. Die Änderungsrate des Ortsvektors in Bezug auf den Kurvenparameter

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

heißt der *Geschwindigkeitsvektor* im Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(t)$ . Falls  $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$  ist, wird mit

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

der *Tangentenvektor* und mit

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

der *Normalvektor* der Kurve definiert. Das Paar  $(\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t))$  wird als *begleitendes Zweibein* bezeichnet. Ist die Kurve  $\Gamma$  zweimal differenzierbar, so ist der *Beschleunigungsvektor* durch

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix}$$

gegeben.

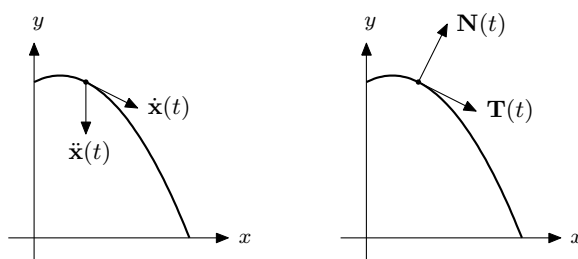


Abbildung 4.7: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Tangente, Normale.

In der Kinematik bedeutet  $t$  die Zeit. Dann ist

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$$

der Geschwindigkeitsvektor im physikalischen Sinne. Ist er von Null verschieden, so weist er in die positive Tangentenrichtung (als Grenzwert von Sekantenvektoren). Der Tangentenvektor ist nichts anderes als der Einheitsvektor derselben Richtung. Durch Drehung um  $90^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn erhalten wir den Normalvektor der Kurve, vergleiche dazu Abb. 4.7.

Üblicherweise schreibt man

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$$

für die *Schnelligkeit*, den Betrag der Geschwindigkeit. Für die Beschleunigung schreibt man  $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t)$ . Wir erhalten die Formeln

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{T}(t), \quad \mathbf{a}(t) = \dot{v}(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\dot{\mathbf{T}}(t). \quad (4.2)$$

**Beispiel 4.13** Für die Wurfparabel aus Beispiel 4.2 gilt

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v_H, & \ddot{x}(t) &= 0, \\ \dot{y}(t) &= v_V - gt, & \ddot{y}(t) &= -g, \\ \mathbf{T}(t) &= \frac{1}{\sqrt{v_H^2 + (v_V - gt)^2}} \begin{bmatrix} v_H \\ v_V - gt \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}(t) &= \frac{1}{\sqrt{v_H^2 + (v_V - gt)^2}} \begin{bmatrix} gt - v_V \\ v_H \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

### 4.1.3 Bogenlänge und Krümmung

Wir beginnen mit der Frage, ob und wie einem Kurvenstück eine Länge zugeordnet werden kann. Gegeben sei eine stetige Kurve

$$\Gamma : t \rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad a \leq t \leq b.$$

Zu einer Zerlegung  $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  des Parameterintervalls betrachten wir den Streckenzug durch die Punkte

$$\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n).$$

Dessen Länge ist

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

**Definition 4.14** (Kurven endlicher Länge) Eine ebene Kurve  $\Gamma$  heißt *rektifizierbar* oder *von endlicher Länge*, wenn die Längen  $L_n$  beliebiger eingeschriebener Streckenzüge gegen einen (und denselben) Grenzwert konvergieren, sofern nur die Feinheit der Zerlegung gegen Null geht.

Es gibt Beispiele unendlich langer stetiger Kurven, deren Kurvenparameter nur ein beschränktes Intervall  $[a, b]$  durchläuft. Dass so ein Verhalten bei differenzierbaren Kurven nicht auftritt, zeigt der nächste Satz.

**Satz 4.15** (Länge differenzierbarer Kurven) Jede stetig differenzierbare Kurve  $t \rightarrow \mathbf{x}(t), t \in [a, b]$  ist rektifizierbar. Ihre Länge ist

$$L = \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

*Beweis:* Wir gehen von einer Zerlegung  $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  der Feinheit  $\Phi(Z)$  des Parameterintervalls aus. Das  $L$  definierende Integral ist Grenzwert von Riemannsummen

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \lim_{n \rightarrow \infty, \Phi(Z) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\tau_i)^2 + \dot{y}(\tau_i)^2} (t_i - t_{i-1})$$

wobei  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$  ist. Andererseits ist nach dem Mittelwertsatz die Länge des eingeschriebenen Streckenzugs durch  $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$  gleich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \\ = \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\rho_i)^2 + \dot{y}(\sigma_i)^2} (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

für gewisse  $\rho_i, \sigma_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Nun gehören aber die auftretenden Zwischenpunkte  $\rho_i, \sigma_i, \tau_i$  zum selben Intervall  $[t_{i-1}, t_i]$ , das bei Verfeinerung der Zerlegung immer kürzer wird. Etwas genauer können wir sagen, dass

$$\left| \sqrt{\dot{x}(\tau_i)^2 + \dot{y}(\tau_i)^2} - \sqrt{\dot{x}(\rho_i)^2 + \dot{y}(\sigma_i)^2} \right| \leq \varepsilon(Z)$$

ist, wobei  $\varepsilon(Z) \rightarrow 0$  geht, wenn die Feinheit  $\Phi(Z)$  der Zerlegung gegen Null geht. Für die Differenz der Riemannsummen und der Streckenzuglängen erhält man damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\dot{x}(\tau_i)^2 + \dot{y}(\tau_i)^2} - \sqrt{\dot{x}(\rho_i)^2 + \dot{y}(\sigma_i)^2} \right) (t_i - t_{i-1}) \right| \\ \leq \varepsilon(Z) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon(Z)(b - a). \end{aligned}$$

Geht  $\Phi(Z) \rightarrow 0$ , so strebt diese Differenz gegen Null. Somit haben die Riemannsummen und die Längen der eingeschriebenen Streckenzüge denselben Grenzwert, eben  $L$ .  $\square$

**Beispiel 4.16** (Länge eines Kreisbogens) Die Parameterdarstellung eines Kreises vom Radius  $\rho$  und ihre Ableitung ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \cos t, & \dot{x}(t) &= -\rho \sin t, \\ y(t) &= \rho \sin t, & \dot{y}(t) &= \rho \cos t, \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Die Länge des Kreisbogens (Umfang) ist somit

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\rho \sin t)^2 + (\rho \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \rho dt = 2\rho\pi.$$

**Definition 4.17** (Bogenlänge) Sei  $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$  eine differenzierbare Kurve. Die Länge des Kurvenstücks vom Anfangsparameterwert  $a$  bis zum aktuellen Parameterwert  $t$  bezeichnet man als *Bogenlänge*,

$$s = L(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau.$$

Differenzieren der Bogenlänge nach  $t$  ergibt die wichtige Formel

$$\frac{ds}{dt} = \dot{L}(t) = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = v(t). \quad (4.3)$$

Die Bogenlänge  $s$  ist eine streng monoton wachsende, stetige (sogar stetig differenzierbare) Funktion und eignet sich daher zu einer Umparametrisierung  $t = L^{-1}(s)$ . Man nennt dann die Kurve

$$s \rightarrow \xi(s) = \mathbf{x}(L^{-1}(s))$$

nach der Bogenlänge parametrisiert.

**Bemerkung 4.18** Wir können Formel (4.3) in Differentialschreibweise umformen zu

$$ds = v(t)dt = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \sqrt{(\dot{x}(t)dt)^2 + (\dot{y}(t)dt)^2}$$

Erinnern wir uns an die Definition des Differentials:  $dx = \dot{x}(t)dt$ ,  $dy = \dot{y}(t)dt$ . Damit erhalten wir die Merkformel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Im Folgenden sei  $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$  eine differenzierbare Kurve (in der Ebene). Es bezeichne  $\varphi(t)$  den Winkel des Tangentenvektors mit der positiven  $x$ -Achse, das heißt,

$$\tan \varphi(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

**Definition 4.19** (Krümmung einer ebenen Kurve) Die *Krümmung* einer differenzierbaren Kurve in der Ebene ist die Änderungsrate des Winkels  $\varphi$  in Bezug auf die Bogenlänge,

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds}\varphi(L^{-1}(s)).$$

Abb. 4.8 veranschaulicht die Definition: Ist  $\varphi$  der Winkel beim Wert  $s$  der Bogenlänge und  $\varphi + \Delta\varphi$  beim Wert  $s + \Delta s$ , so ist  $\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ . Dies zeigt, dass die Größe von  $\kappa$  tatsächlich dem geometrisch-anschaulichen Krümmungsverhalten entspricht. Man beachte, dass die Krümmung einer ebenen Kurve mit einem Vorzeichen behaftet ist; bei Umkehrung der Durchlaufrichtung wechselt sie das Vorzeichen.

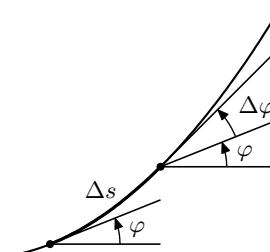


Abbildung 4.8: Krümmung.

**Satz 4.20** Die Krümmung einer zweimal stetig differenzierbaren Kurve im Kurvenpunkt  $(x(t), y(t))$  beträgt

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3}.$$

*Beweis:* Nach der Kettenregel und der Regel für die Umkehrfunktion gilt

$$\kappa = \frac{d}{ds}\varphi(L^{-1}(s)) = \dot{\varphi}(L^{-1}(s)) \cdot \frac{d}{ds}L^{-1}(s) = \dot{\varphi}(L^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\dot{L}(L^{-1}(s))}.$$

Aus Gleichung (4.3) wissen wir:

$$\dot{L}(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}.$$

Ableiten der Beziehung  $\tan \varphi(t) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t)$  führt auf

$$\dot{\varphi}(t)(1 + \tan^2 \varphi(t)) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^2},$$

was nach Einsetzen des eben verwendeten Ausdrucks für  $\tan \varphi(t)$  und Kürzen

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$

liefert. Beachtet man die Beziehung  $t = L^{-1}(s)$  und setzt die gewonnenen Ausdrücke für  $\dot{\varphi}(t)$  und  $\dot{L}(t)$  in der am Anfang hergeleiteten Formel für  $\kappa$  ein, so erhält man

$$\kappa(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{L}(t)} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}},$$

was zu beweisen war. □

**Folgerung 4.21** Es gilt:

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = v(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t).$$

*Beweis:* Differenzieren nach der Quotientenregel ergibt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \frac{-\dot{y}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Aus  $[-\dot{y}, \dot{x}]^T = v(t)\mathbf{N}(t)$  und Satz 4.20 ergibt sich die gewünschte Formel. □

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun Geschwindigkeit und Beschleunigung in Zweibeinkoordinaten nach Gleichung (4.2) darstellen:

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{T}(t), \quad \mathbf{a}(t) = \dot{v}(t)\mathbf{T}(t) + v^2(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t).$$

**Bemerkung 4.22** Die Krümmung des Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion  $y = f(x)$  erhält man zu

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}},$$

was man mittels Parametrisierung  $x = t, y = f(t)$  leicht herleitet.

**Beispiel 4.23** Die Krümmung eines positiv durchlaufenen Kreises vom Radius  $\rho$  ist konstant gleich  $\kappa = \frac{1}{\rho}$ . Es ist ja

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \cos t, & \dot{x}(t) &= -\rho \sin t, & \ddot{x}(t) &= -\rho \cos t, \\ y(t) &= \rho \sin t, & \dot{y}(t) &= \rho \cos t, & \ddot{y}(t) &= -\rho \sin t, \end{aligned}$$

daher

$$\kappa = \frac{\rho^2 \sin^2 t + \rho^2 \cos^2 t}{(\rho^2 \sin^2 t + \rho^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{\rho}.$$



**Definition 4.24** Der *Krümmungskreis* in einem Kurvenpunkt einer differenzierbaren Kurve ist jener Kreis, der dieselbe Tangente und dieselbe Krümmung besitzt.

Nach Beispiel 4.23 folgt, dass der Krümmungskreis den *Krümmungsradius*

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$

besitzt und sein Mittelpunkt  $\mathbf{x}_M(t)$  daher im Abstand  $\rho(t)$  längs der Normalenrichtung  $\mathbf{N}(t)$  vom Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(t)$  liegt:

$$\mathbf{x}_M(t) = \mathbf{x}(t) + \rho(t)\mathbf{N}(t);$$

man beachte hier, dass der Krümmungsradius mit einem Vorzeichen versehen ist und  $\mathbf{x}_M(t)$  daher je nach Vorzeichen der Krümmung in Richtung  $\pm\mathbf{N}(t)$  aufzutragen ist.

Zur Herleitung der so genannten Formel von Frenet<sup>4</sup> leiten wir nun den Tangentenvektor nach der Bogenlänge ab und erhalten mittels Ketten- und Umkehrregel sowie Formel (4.3) und Folgerung (4.21)

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{v(t)} = \kappa(t)\mathbf{N}(t).$$

Setzen wir  $t$  als Funktion der Bogenlänge  $s$  ein, so können wir das Ergebnis in gebräuchlicher Form schreiben:

**Satz 4.25** (Formel von Frenet in der Ebene)

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s) = \frac{1}{\rho(s)}\mathbf{N}(s).$$

**Beispiel 4.26** (Klothoide) Die *Klothoide* ist eine Kurve, deren Krümmung proportional zur Bogenlänge ist. Sie eignet sich daher als Übergangsstück von einer Geraden (Krümmung 0) zu einem Kreisbogen (Krümmung  $\frac{1}{R}$ ) und findet im Eisenbahn- und Straßenbau Verwendung. Ihre definierende Eigenschaft ist

$$\kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds} = cs$$

für ein  $c \in \mathbb{R}$ . Beginnt man mit Krümmung 0 bei  $s = 0$ , so folgt für den Winkel

$$\varphi(s) = \frac{c}{2}s^2.$$

Wir verwenden  $s$  als Kurvenparameter. Ableiten der Beziehung

$$s = \int_0^s \sqrt{\dot{x}(\sigma)^2 + \dot{y}(\sigma)^2} d\sigma$$

zeigt, dass

$$1 = \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2}$$

---

<sup>4</sup>J. F. Frenet, 1816–1900

ist, der Geschwindigkeitsvektor einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve also Länge 1 hat. Daraus folgt insbesondere

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi(s), \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi(s).$$

Wir können daraus den Kurvenverlauf ermitteln:

$$x(s) = \int_0^s \frac{dx}{ds}(\sigma) d\sigma = \int_0^s \cos \varphi(\sigma) d\sigma = \int_0^s \cos\left(\frac{c}{2}\sigma^2\right) d\sigma,$$

$$y(s) = \int_0^s \frac{dy}{ds}(\sigma) d\sigma = \int_0^s \sin \varphi(\sigma) d\sigma = \int_0^s \sin\left(\frac{c}{2}\sigma^2\right) d\sigma.$$

Die Kurvenpunkte sind somit durch Fresnel'sche Integrale gegeben. Für den Kurvenverlauf siehe Abb. 4.9.

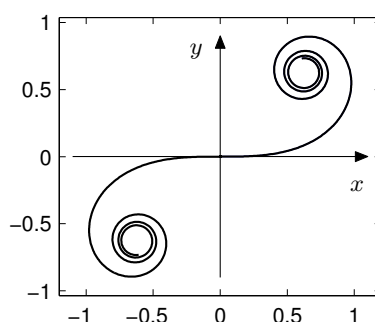


Abbildung 4.9: Klothoide.

## 4.2 Kurven im Raum

In Analogie zu einer ebenen Kurve ist eine *parametrisierte Raumkurve* definiert als stetige Abbildung eines Intervalls  $[a, b]$  in den  $\mathbb{R}^3$ ,

$$t \rightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad a \leq t \leq b.$$

Die Kurve heißt *differenzierbar*, wenn alle drei Komponentenfunktionen  $t \rightarrow x(t)$ ,  $t \rightarrow y(t)$ ,  $t \rightarrow z(t)$  differenzierbare reellwertige Funktionen sind.

### 4.2.1 Das begleitende Dreibein

Geschwindigkeitsvektor und Tangentenvektor einer differenzierbaren Raumkurve sind ebenfalls analog zum ebenen Fall definiert als

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}.$$

Der Beschleunigungsvektor ist  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ . Im räumlichen Fall gibt es eine *Normalebene* zur Kurve, die durch den *Hauptnormalenvektor*

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|} \dot{\mathbf{T}}(t)$$

und den *Binormalenvektor*

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

aufgespannt werden (jeweils  $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{T}}(t) \neq \mathbf{0}$  vorausgesetzt). Dass  $\dot{\mathbf{T}}(t)$  orthogonal zu  $\mathbf{T}(t)$  ist, ersieht man aus der Formel

$$0 = \frac{d}{dt} 1 = \frac{d}{dt} \|\mathbf{T}(t)\|^2 = 2\langle \mathbf{T}(t), \dot{\mathbf{T}}(t) \rangle,$$

wie man durch komponentenweises Ableiten leicht nachvollzieht. Man bezeichnet das Tripel  $(\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t))$  als *begleitendes Dreibein* der Raumkurve. Die durch die Vektoren  $\mathbf{T}(t)$  und  $\mathbf{N}(t)$  im Punkt  $\mathbf{x}(t)$  aufgespannte Ebene heißt *Schmiegeebene* an die Kurve im Punkt  $\mathbf{x}(t)$ . Der Binormalenvektor  $\mathbf{B}(t)$  steht senkrecht auf die Schmiegeebene.

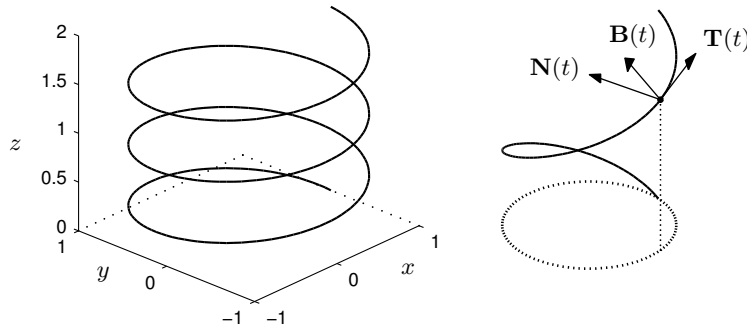


Abbildung 4.10: Schraubenlinie mit Tangenten-, Normalen- und Binormalenvektor.

**Beispiel 4.27** (Schraubenlinie) Die neutrale Faser einer Schraubfeder wird durch die Kurve mit Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2n\pi$$

modelliert, wobei  $r$  der Radius,  $2\pi h$  die Ganghöhe und  $n$  die Windungszahl ist. Es ist

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{bmatrix}, & \mathbf{T}(t) &= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{bmatrix}, \\ \dot{\mathbf{T}}(t) &= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{N}(t) &= \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit  $R = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = \sqrt{r^2 + h^2}$ . Der Binormalenvektor ist

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} h \sin t \\ -h \cos t \\ r \end{bmatrix}.$$

### 4.2.2 Bogenlänge und Krümmung von Raumkurven

Die *Bogenlänge* einer differenzierbaren Raumkurve  $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$  ist analog zum ebenen Fall definiert durch

$$s = L(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| \, d\tau = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2} \, d\tau.$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt wieder die Beziehung

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = v(t).$$

Zur Erklärung der Krümmung einer Raumkurve erinnern wir an den Fall einer ebenen Kurve. Nach der Formel von Frenet (Satz 4.25) ist  $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$ . Da der Normalenvektor  $\mathbf{N}$  die Länge Eins hat, ist der Betrag  $|\kappa|$  der Krümmung gleich der Länge des Vektors  $d\mathbf{T}/ds$ . Diese Beobachtung motiviert die Definition der Krümmung einer Raumkurve.

**Definition 4.28** Sei  $\mathbf{x}(t)$  eine zweimal stetig differenzierbare Kurve,  $v(t) \neq 0$ . Dann heißt die Zahl

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{v(t)} = \frac{\|\dot{\mathbf{T}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} \quad (4.4)$$

*Krümmung* der Kurve an der Stelle  $\mathbf{x}(t)$ . Der *Krümmungsradius* ist  $\rho(t) = 1/\kappa(t)$ .

Im Unterschied zum Fall ebener Kurven ist die Krümmung einer Raumkurve stets positiv (oder Null). In der Ebene kann die Krümmung mit einem Vorzeichen versehen werden, da dort eine Orientierung (Uhrzeigersinn oder Gegenuhrzeigersinn) ausgezeichnet werden kann.

Nach Definition von  $\mathbf{N}$  gelten wieder die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) = v(t) \mathbf{T}(t), \\ \mathbf{a}(t) &= \ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{v}(t) \mathbf{T}(t) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nun ist  $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$ . Damit folgt aus (4.5)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) = v(t)^3 \kappa(t) \mathbf{B}(t)$$

und weiter  $\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\| = v(t)^3 \kappa(t)$ . Wir erhalten damit die Formeln

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^3} \quad (4.6)$$

und

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\|} \dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t), \quad (4.7)$$

sofern  $\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\| \neq 0$  ist.

### 4.2.3 Torsion

Anschaulich beschreibt die Torsion das *Herauswinden* der Kurve aus der Schmiegeebene. In Analogie zur Krümmung betrachtet man zunächst die Änderung des Binormalenvektors, bezogen auf die Bogenlänge, also

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{B}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{s(t+h) - s(t)} (\mathbf{B}(t+h) - \mathbf{B}(t)).$$

Wegen  $\|\mathbf{B}(t)\| = 1$  steht  $\dot{\mathbf{B}}(t)$  senkrecht zu  $\mathbf{B}(t)$ . Weiters ist  $\dot{\mathbf{T}}$  ein Vielfaches von  $\mathbf{N}$  und daher

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = \dot{\mathbf{T}} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \dot{\mathbf{N}} = \mathbf{T} \times \dot{\mathbf{N}}.$$

Somit steht  $\dot{\mathbf{B}}(t)$  auch senkrecht zu  $\mathbf{T}(t)$ . Die Vektoren  $\dot{\mathbf{B}}(t)$  und  $\mathbf{N}(t)$  sind daher parallel; daher existiert eine skalare Funktion  $\tau = \tau(t)$  mit

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{B}}(t) = -\tau(t) \mathbf{N}(t). \quad (4.8)$$

**Definition 4.29** Die durch (4.8) definierte Funktion  $\tau(t)$  heißt *Torsion* der Kurve im Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(t)$ .

**Satz 4.30** Für einen regulären, dreimal stetig differenzierbaren Weg mit  $\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\| \neq 0$  berechnet sich die Torsion zu

$$\tau(t) = \frac{\det[\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)]}{\|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)\|^2}.$$

Diesen und den nächsten Satz beweisen wir hier aus Platzgründen nicht.

**Beispiel 4.31** Wir setzen Beispiel 4.27 fort. Das Dreibein haben wir bereits berechnet. Wir notieren

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} r \sin t \\ -r \cos t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eingesetzt in die oben angegebenen Formeln ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{r}{r^2 + h^2}, \quad \tau(t) = \frac{h}{r^2 + h^2},$$

das heißt, Krümmung und Torsion sind für diese Feder konstant.

Verläuft ein Kurvenstück ganz in der Schmiegeebene, so bleibt der Binormalenvektor konstant. Dementsprechend ist die Torsion Null. Die folgenden Formeln stellen die Ableitungen des Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalenvektors nach der Bogenlänge in Dreibeinkoordinaten dar.

**Satz 4.32** (Formeln von Frenet im Raum) Sei  $\boldsymbol{\xi} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine dreimal stetig differenzierbare, auf Bogenlänge parametrisierte Kurve, deren Krümmung  $\kappa(s)$  nirgends Null ist. Dann gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s) &= \kappa(s) \mathbf{N}(s), \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds}(s) &= -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s), \\ \frac{d\mathbf{B}}{ds}(s) &= -\tau(s) \mathbf{N}(s). \end{aligned} \quad (4.9)$$

## 4.3 Kurvenintegrale

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Kurve  $\Gamma : t \rightarrow \mathbf{x}(t)$ . Wir schließen die beiden Fälle ebener und räumlicher Kurven ein, also

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Wir wollen skalare Funktionen und Vektorfelder längs der Kurve  $\Gamma$  integrieren (Kurvenintegrale erster und zweiter Art).

### 4.3.1 Kurvenintegrale erster Art

Das Standardbeispiel für ein Kurvenintegral erster Art erhält man, wenn man sich längs der Kurve  $\Gamma$  eine Massenbelegung vorstellt (etwa die Dichte eines Drahtes). Im Kurvenpunkt  $\mathbf{x}$  liege die Dichte  $f(\mathbf{x})$  vor. Betrachten wir das Kurventeilstück zwischen Parameterwert  $t$  und  $t + \Delta t$ . Dessen Länge ist

$$\Delta s = \|\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)\| \approx \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \Delta t.$$

Die Masse im Teilstück ist daher näherungsweise gleich  $\Delta m = f(\mathbf{x}) \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \Delta t$ . Durchnummerieren der Teilstücke und Summation ergibt die Näherung an die Gesamtmasse in Form der Riemannsumme

$$\sum_{j=1}^n f(\mathbf{x}(t_j)) \|\dot{\mathbf{x}}(t_j)\| \Delta t.$$

Bei Verfeinerung der Zerlegung in Teilstücke konvergieren die Riemannsummen zu einem Integral, das als *Kurvenintegral erster Art* bezeichnet wird.

**Definition 4.33** Sei  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ ,  $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$  ein stetig differenzierbarer Weg und  $f$  ein Skalarfeld (eine reellwertige Funktion), definiert zumindest längs  $\Gamma$ . Dann nennt man

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{x}(t)) \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt \quad (4.10)$$

das *Kurvenintegral* von  $f$  längs  $\Gamma$  oder auch Kurvenintegral 1. Art.

**Beispiel 4.34** (a) Die Bogenlänge. Wählt man für die Belegung  $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ , so ergibt sich als Kurvenintegral erster Art

$$L = \int_{\Gamma} ds = \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt$$

gerade die Länge der Kurve  $\Gamma$ .

(b) Das erste Moment einer Viertelkreislinie. Hier ist

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

und das erste statische Moment damit gleich

$$\int_{\Gamma} x \, ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 1.$$

### 4.3.2 Kurvenintegrale zweiter Art

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Eine vektorwertige Funktion  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  nennt man *Vektorfeld* auf  $D$ . Ein Vektorfeld ordnet somit jedem Punkt in  $D$  einen Vektor zu. Typische Beispiele für Vektorfelder sind Kraftfelder wie das Gravitationsfeld oder Geschwindigkeitsfelder (beispielsweise von Strömungen).

Betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes längs einer Kurve  $\Gamma$  in einem Kraftfeld  $\mathbf{F}$ . Falls die Kraft  $\mathbf{F}$  in allen Punkten konstant ist und der Weg geradlinig verläuft, gilt

$$\text{Arbeit} = \langle \text{Kraft}, \text{Weg} \rangle$$

(Kraftkomponente in Wegerichtung mal Weg). Bei krummlinigen Wegen betrachten wir wieder ein Kurventeilstück zwischen Parameterwert  $t$  und  $t + \Delta t$ ; dessen Länge ist  $\Delta s \approx \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \Delta t$ . Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel zwischen Kraftvektor und Tangentenrichtung, so ist die Kraftkomponente in Wegerichtung gerade (vgl. Abb. 4.11)

$$\|\mathbf{F}\| \cos \alpha = \|\mathbf{F}\| \frac{\langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{F}\| \|\dot{\mathbf{x}}\|} = \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle.$$

Die im Teilstück der Länge  $\Delta s$  in der Nähe des Kurvenpunkts  $\mathbf{x}(t)$  geleistete Arbeit ist demnach gleich

$$\Delta A \approx \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{T}(t) \rangle \Delta s = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle \Delta t.$$

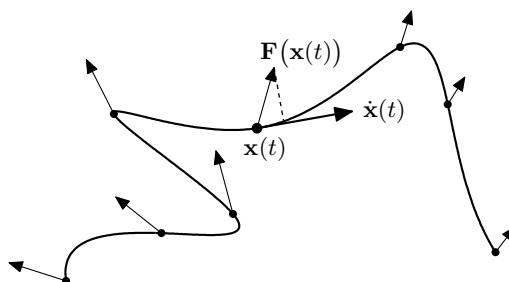


Abbildung 4.11: Arbeit in einem Kraftfeld.

Summation über alle Teilstücke und Grenzübergang bei Verfeinerung ergibt ein Riemannintegral für die Gesamtarbeit, ein *Kurvenintegral zweiter Art*.

**Definition 4.35** Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma : [a, b] \rightarrow D$  eine reguläre Kurve (d.h. einmal stetig differenzierbar und  $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$ ) und  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle \, ds = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{T}(t) \rangle \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \, dt = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle \, dt = \int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle \quad (4.11)$$

*Kurvenintegral von  $\mathbf{F}$  längs  $\Gamma$  (oder Kurvenintegral 2. Art).*

Die Notation am Schluss der Formel erklärt sich aus der Differentialschreibweise:

$$d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}}(t) dt.$$

Oft wird auch die komponentenweise Schreibweise für das Kurvenintegral verwendet. Wir setzen

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) dt \\ \dot{y}(t) dt \\ \dot{z}(t) dt \end{bmatrix}.$$

Führen wir noch die Differentiale der Komponenten ein,

$$dx = \dot{x}(t) dt, \quad dy = \dot{y}(t) dt, \quad dz = \dot{z}(t) dt,$$

so erklärt sich die folgende Schreibweise für das Kurvenintegral zweiter Art:

$$\int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

**Bemerkung 4.36** (a) Verläuft die Bahnkurve stets senkrecht auf den Kraftvektor, so ist die geleistete Arbeit bzw. der Wert des Kurvenintegrals gleich Null, da ja gilt:

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle = 0.$$

(b) Im Allgemeinen ist das Kurvenintegral *wegabhängig*, das heißt, sind  $\Gamma_1, \Gamma_2$  zwei Kurven mit denselben Anfangs- und Endpunkten, so gilt im Allgemeinen

$$\int_{\Gamma_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle \neq \int_{\Gamma_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle.$$

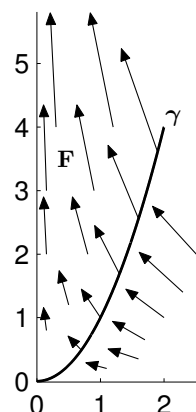
Gleichheit gilt, wenn die Kraft  $\mathbf{F}$  ein *Potential* besitzt (siehe den folgenden Abschnitt).

**Beispiel 4.37** Wir betrachten die ebene Kurve  $\Gamma$  mit Parametrisierung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

und das Vektorfeld  $\mathbf{F}(x, y) = [-x, 3y]^T$ , vgl. Abbildung rechts (Pfeile skaliert). Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle &= \int_0^2 \left\langle \begin{bmatrix} -t \\ 3t^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^2 (-t + 6t^3) dt = \frac{1}{2}(-t^2 + 3t^4) \Big|_0^2 = 22. \end{aligned}$$



**Beispiel 4.38** Sei  $\Gamma$  das Kurvenstück, welches die Punkte  $(0, 0, 2)$  und  $(2, 8, 2)$  längs des Graphen  $y = x^3$  in der Ebene  $z = 2$  verbindet. Zur Berechnung des Kurvenintegrals von  $\mathbf{F} = [x^2y, x - z, xyz]^T$  entlang  $\Gamma$  stellen wir zunächst  $\Gamma$  als parametrisierte Kurve dar:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} x(t) &= t, & dx &= dt, \\ y(t) &= t^3, & dy &= 3t^2 dt, \\ z(t) &= 2, & dz &= 0. \end{aligned}$$



Wir führen die Berechnung in der zweiten Schreibweise durch:

$$\int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \int_{\Gamma} x^2 y dx + (x - z) dy + xyz dz = \int_0^2 (t^5 \cdot 1 + (t - 2) \cdot 3t^2 + 2t^4 \cdot 0) dt,$$

wobei wir im Integranden  $x = t$ ,  $y = t^3$ ,  $z = 2$ ,  $dx = dt$ ,  $dy = 3t^2 dt$  und  $dz = 0 dt$  eingesetzt haben. Der Wert des Integrals ergibt sich zu  $\int_0^2 (t^5 + 3t^3 - 6t^2) dt = 20/3$ .

**Bemerkung 4.39** (a) Eine Kurve heißt *geschlossen*, wenn Anfangs- und Endpunkt der Kurve zusammenfallen. In diesem Fall verwendet man für das Kurvenintegral oft das Symbol

$$\oint_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle.$$

### 4.3.3 Potentialfelder

Es sei  $\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_n]^T$  ein Vektorfeld in  $\mathbb{R}^n$  (in der Folge werden wir  $n = 2$  oder  $n = 3$  betrachten). Man sagt, dass das Vektorfeld ein *Potential*  $\Psi$  besitzt, wenn gilt

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} \Psi.$$

In Komponenten ausgeschrieben bedeutet dies

$$F_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad F_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad F_n = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_n}.$$

In diesem Fall nennt man  $\mathbf{F}$  ein *konservatives Feld*, ein *Potentialfeld* oder ein *Gradientenfeld*. Das negative Vorzeichen ist in der Mechanik üblich. Für die Anwendung auf Kurvenintegrale ist es manchmal günstiger, statt des Potentials  $\Psi$  eine *Stammfunktion*  $\Phi = -\Psi$  zu nehmen. Für eine Stammfunktion gilt dann

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad} \Phi.$$

Aus der Gleichheit der gemischten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2 \partial x_1}$$

folgt

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

und ebenso für die anderen Komponenten. Dies ergibt eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials.

**Satz 4.40** Falls ein differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{F}$  ein Potential besitzt, so müssen notwendigerweise die *Integrabilitätsbedingungen*

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

erfüllt sein.

Wenn wir uns an die Definition der Rotation aus Abschnitt 3.4.2 erinnern, so bedeutet dies im  $\mathbb{R}^2$  bzw. im  $\mathbb{R}^3$  gerade

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

**Beispiel 4.41** (a) Das auf  $\mathbb{R}^2$  ohne den Ursprung definierte Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{bmatrix}$$

besitzt das Potential

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2).$$

Die Integrabilitätsbedingung  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$  ist leicht nachzuprüfen.

(b) Das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x + y \\ 2x \end{bmatrix}$$

besitzt kein Potential. Offensichtlich gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 - 1 \neq 0.$$

Man kann auch direkt nachprüfen, dass  $\mathbf{F}$  keine Stammfunktion  $\Phi(x, y)$  besitzt. Man hätte dann nämlich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2x, \quad \Phi(x, y) = 2xy + H(x)$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion  $H(x)$ . Dann ist aber

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2y + H'(x) \quad \text{im Widerspruch zu} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = x + y.$$

**Beispiel 4.42** Das Newton'sche<sup>5</sup> Gravitationspotential einer im Ursprung des  $\mathbb{R}^3$  befindlichen Masse der Größe  $M[\text{kg}]$  ist gegeben durch

$$\Psi(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Dabei ist  $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} [\text{Nm}^2/\text{kg}^2]$  die Gravitationskonstante.  $\Psi(\mathbf{x})$  ist die potentielle Energie einer Einheitsmasse, die sich im Abstand  $\|\mathbf{x}\|$  vom Ursprung befindet. Die Feldstärke wird eingeführt als

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla \Psi(\mathbf{x}) = -GM \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}.$$

Die Gravitationskraft auf eine Masse  $m[\text{kg}]$  im Abstand  $\|\mathbf{x}\|$  vom Ursprung ist

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = m \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

---

<sup>5</sup>I. Newton, 1642–1727

Mengen, bei denen man je zwei Punkte durch einen Weg verbinden kann, werden als *(weg)zusammenhängend* bezeichnet. Eine offene wegzusammenhängende Teilmenge  $D$  des  $\mathbb{R}^n$  nennt man ein *Gebiet*.

**Satz 4.43** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld mit Stammfunktion  $\Phi$  und  $\Gamma : [a, b] \rightarrow D$  ein stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \Phi(\mathbf{x}(b)) - \Phi(\mathbf{x}(a)).$$

*Beweis:* Wir verwenden  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla \Phi(\mathbf{x})$  und setzen die Parametrisierung ein:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle &= \int_{\Gamma} \langle \nabla \Phi, d\mathbf{x} \rangle = \int_a^b \langle \nabla \Phi(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{x}(t)) dt \\ &= \Phi(\mathbf{x}(t)) \Big|_a^b = \Phi(\mathbf{x}(b)) - \Phi(\mathbf{x}(a)), \end{aligned}$$

wobei wir beim dritten Gleichheitszeichen die Kettenregel verwendet haben.  $\square$

In einem Potentialfeld hängt also das Kurvenintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. Wir schreiben dann für das Kurvenintegral auch

$$\int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \int_{\mathbf{x}(a)}^{\mathbf{x}(b)} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle.$$

Bei einer geschlossenen Kurve ist der Anfangspunkt gleich dem Endpunkt; daher gilt in einem Potentialfeld

$$\oint_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = 0.$$

**Beispiel 4.44** Sei  $\Phi(x, y) = xy$ . Dann ist

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla \Phi(x, y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

ein Potentialfeld. Sei  $\Gamma$  eine Kurve mit Anfangspunkt  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  und Endpunkt  $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

Wir berechnen das Kurvenintegral auf zwei Arten.

- (a) Unter Verwendung der Stammfunktion  $\Phi$  berechnet sich das Kurvenintegral wie folgt:

$$\int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \int_{(1,1)}^{(2,4)} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \Phi(2, 4) - \Phi(1, 1) = 8 - 1 = 7.$$

- (b) Sei  $\Gamma$  der direkte Verbindungsweg zwischen den beiden Punkten mit Parametrisierung

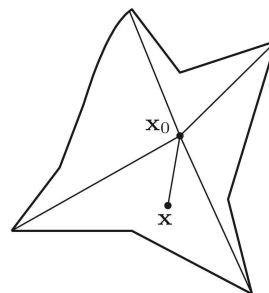
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1+t \\ 1+3t \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dann ist

$$\int_{\Gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 1+3t \\ 1+t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (4+6t) dt = 4t + 3t^2 \Big|_0^1 = 7.$$

Man kann zeigen, dass ein Vektorfeld  $\mathbf{F}$  in einem Gebiet genau dann ein Potential besitzt, wenn alle Kurvenintegrale wegunabhängig sind (oder alle Kurvenintegrale über geschlossene Wege gleich Null sind).

Ein Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^n$  nennt man *sternförmig*, wenn es einen Punkt  $\mathbf{x}_0$  in  $D$  mit folgender Eigenschaft gibt: die Verbindungsgerade von  $\mathbf{x}_0$  mit jedem weiteren Punkt  $\mathbf{x} \in D$  liegt ganz in  $D$ .



Kreisringe, Gebiete mit Löchern oder die punktierte Ebene  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  sind nicht sternförmig.

In einem sternförmigen Gebiet sind die Integrabilitätsbedingungen (Satz 4.40) auch hinreichend für die Existenz eines Potentials, wie man zeigen kann. Das heißt, ein differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{F}$  mit

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

besitzt in sternförmigen Gebieten  $D \subset \mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  ein Potential.

Man kann dabei auf die Bedingung der Sternförmigkeit nicht verzichten, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 4.45** Sei

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \dots = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

ist erfüllt, es gilt jedoch

$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\tau = 2\pi \neq 0,$$

wobei  $\Gamma$  den Einheitskreis bezeichnet, parametrisiert gegen den Uhrzeigersinn mittels

$$\begin{aligned} x &= \cos \tau, & dx &= -\sin \tau \, d\tau, \\ y &= \sin \tau, & dy &= \cos \tau \, d\tau, \end{aligned} \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

Damit ist  $\mathbf{F}$  kein Potentialfeld (anderenfalls müssten Integrale über geschlossene Wege Null sein).

**Bestimmung einer Stammfunktion.** Erfüllt ein Vektorfeld in einem sternförmigen Gebiet  $D$  die Integrabilitätsbedingungen, so kann man eine Stammfunktion mit Hilfe des Kurvenintegrals angeben:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle,$$

wobei  $\Gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$  eine beliebige stetig differenzierbare Kurve in  $D$  bezeichnet, welche  $\mathbf{x}_0$  mit  $\mathbf{x}$  verbindet.

**Beispiel 4.46** Sei  $D = \mathbb{R}^2$  und

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} y - x \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

$D$  ist sternförmig und  $\mathbf{F}$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Wir wählen  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und verbinden  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}$  mittels einer Geraden  $\Gamma(\mathbf{0}, \mathbf{x})$ :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Man erhält

$$\Phi(x, y) = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} ty - tx \\ tx \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle dt = \frac{1}{2}(y - x)x + \frac{xy}{2} = xy - \frac{x^2}{2}.$$

Alternativ könnte man  $\Phi$  auch mit Hilfe eines Ansatzes ermitteln. Wegen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x$$

muss gelten

$$\Phi(x, y) = xy + H(x)$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion  $H(x)$ . Wegen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y + H'(x) = y - x$$

folgt

$$H(x) = -\frac{x^2}{2} + C$$

mit einer beliebigen Konstanten  $C$ . Man erhält daher die Stammfunktionen

$$\Phi(x, y) = xy - \frac{x^2}{2} + C.$$

# Kapitel 5

## Die Integralsätze von Gauß und Green

### 5.1 Hydromechanische Herleitung

In den Integralsätzen von Gauß<sup>1</sup>, Green<sup>2</sup> und Stokes<sup>3</sup> geht es um die Umrechnung von Bereichs- oder Volumsintegralen auf Kurven- oder Oberflächenintegrale. In diesem Kapitel behandeln wir den ebenen Fall (Sätze von Gauß und Green in der Ebene), im nächsten Kapitel den räumlichen Fall (Sätze von Gauß und Stokes im Raum).

Die Integralsätze sind durch hydromechanische Überlegungen motiviert. Wir betrachten dazu ein ebenes Gebiet  $B \subset \mathbb{R}^2$  und ein Vektorfeld

$$\mathbf{v} : B \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{bmatrix}.$$

**Satz 5.1** Es sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  ein positiv orientiertes Polytop mit Randkurve  $\partial B$ ,  $\mathbf{v}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $B$  und  $\mathbf{n}$  der nach außen gerichtete Normalenvektor. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \iint_B \operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) \, d(x, y) &= \int_{\partial B} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle && \text{(Satz von Gauß in der Ebene);} \\ \iint_B \operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y) \, d(x, y) &= \int_{\partial B} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle && \text{(Satz von Green in der Ebene).} \end{aligned}$$

Hier sind einige Begriffe zu erklären: einerseits die geometrischen – wie die des Polytops und der Orientierung –, andererseits die Kurvenintegrale. Beginnen wir mit letzteren.

Wir betrachten eine reguläre Kurve  $\Gamma$  im  $\mathbb{R}^2$ , parametrisiert durch  $\mathbf{x}(t) = [x(t), y(t)]^\top$ ,  $t \in [a, b]$ . Für die Formulierung der Integralsätze benötigen wir an Stelle des im Ab-

---

<sup>1</sup>C.F. Gauß, 1777–1855.

<sup>2</sup>G. Green, 1793–1841.

<sup>3</sup>G.G. Stokes, 1819–1903.

schnitt 4.1.2 eingeführten Normalvektors  $\mathbf{N}(t)$  dessen Umkehrung  $\mathbf{n}(t)$ , die wir als *Standardnormalvektor* bezeichnen:

$$\mathbf{n}(t) = -\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{bmatrix}.$$

Der Standardnormalvektor weist in Durchlaufrichtung der Kurve nach rechts. Wir definieren das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle = \int_{\Gamma} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle ds = \int_a^b \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{n}(t) \rangle \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt.$$

Zur hydromechanischen Herleitung der Integralsätze beginnen wir mit dem Begriff des *Flusses* eines Vektorfelds. Wir betrachten zunächst eine ebene, konstante Parallelströmung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem Streifen der Breite  $\Delta h$  (und Tiefe 1). Die (konstante) Strömungsgeschwindigkeit werde mit  $\mathbf{v}$  bezeichnet. Der *Fluss* durch einen senkrechten Querschnitt ist definiert als

$$\text{Fluss} = \text{Volumen/Zeit} = \text{Länge/Zeit} \times \text{Querschnittsfläche} = \|\mathbf{v}\| \cdot \Delta h \cdot 1.$$

Will man den Fluss durch einen schräg zur Strömungsrichtung liegenden Schnitt der Breite  $\Delta s$  berechnen, so ergibt sich (Abbildung 5.1) mit

$$\Delta h = \cos \alpha \Delta s$$

und dem Einheitsnormalvektor  $\mathbf{n}$  auf die Schnittfläche:

$$\text{Fluss} = \|\mathbf{v}\| \cos \alpha \Delta s = \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \Delta s.$$

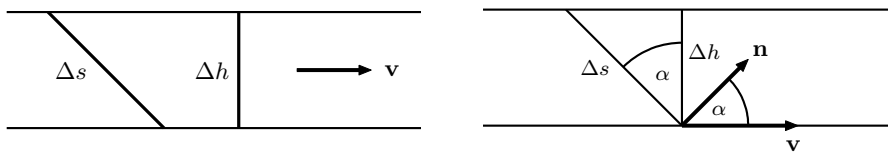


Abbildung 5.1: Fluss einer ebenen Parallelströmung.

Nehmen wir nun eine reguläre Kurve  $\Gamma$  mit Parametrisierung  $\mathbf{x}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Wir stellen uns vor, dass die Kurve durch einen Streckenzug mit Stützstellen  $\mathbf{x}(t_i)$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  angenähert werde, wobei jede Teilstrecke die Länge  $\Delta s$  haben soll. Der Fluss eines beliebigen Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  durch den Streckenzug ist gleich

$$\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}(t_i)), \mathbf{n}_i \rangle \Delta s \approx \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}(t_i)), \mathbf{n}_i \rangle \|\dot{\mathbf{x}}(t_i)\| \Delta t$$

wobei  $\mathbf{n}_i$  jeweils die Normale auf die  $i$ -te Teilstrecke bezeichnet. Dies ist eine Riemannsumme, welche bei Verfeinerung gegen das Kurvenintegral

$$\Phi(\Gamma) = \int_a^b \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{n}(t) \rangle \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt = \int_{\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle$$

konvergiert. Dieses Integral stellt den *Fluss des Vektorfeldes durch die Kurve*  $\Gamma$  dar. Ist die Kurve geschlossen und wird sie im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, so handelt es sich um den Fluss aus dem von der Kurve begrenzten Gebiet *nach außen*.

Zur Berechnung des Flusses integriert man die Normalkomponente des Vektorfeldes längs  $\Gamma$ . Integriert man stattdessen die Tangentialkomponente, so erhält man die so genannte Zirkulation des Vektorfeldes längs  $\Gamma$ .

**Definition 5.2** Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{v}$  und eine stückweise reguläre Kurve  $\Gamma$  heißt

$$\Phi(\Gamma) = \int_{\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle$$

der *Fluss des Vektorfeldes*  $\mathbf{v}$  längs  $\Gamma$  und

$$Z(\Gamma) = \int_{\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle$$

die *Zirkulation des Vektorfeldes*  $\mathbf{v}$  längs  $\Gamma$ .

Wir wollen nun die Divergenz des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  als *Quelldichte* interpretieren. Wir betrachten dazu ein achsenparalleles Rechteck mit den Eckpunkten

$$(x, y), (x + \Delta x, y), (x + \Delta x, y + \Delta y), (x, y + \Delta y)$$

und ein differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{v}$  mit der Horizontalkomponente  $v_1$  und der Vertikalkomponente  $v_2$ . Für unsere heuristische Überlegung nehmen wir an, dass  $v_1 > 0$  und  $v_2 > 0$  ist. Der *Einfluss* ins Rechteck ist näherungsweise gleich

$$v_2(x, y) \Delta x + v_1(x, y) \Delta y,$$

der *Ausfluss* entsprechend ungefähr gleich

$$v_1(x + \Delta x, y) \Delta y + v_2(x, y + \Delta y) \Delta x.$$

Die Strömungsbilanz ergibt sich als Differenz von Ausfluss und Einfluss zu

$$v_1(x + \Delta x, y) \Delta y - v_1(x, y) \Delta y + v_2(x, y + \Delta y) \Delta x - v_2(x, y) \Delta x.$$

Die *Quelldichte* ist die Strömungsbilanz bezogen auf die Fläche  $\Delta x \Delta y$ , also

$$\frac{v_1(x + \Delta x, y) - v_1(x, y)}{\Delta x} + \frac{v_2(x, y + \Delta y) - v_2(x, y)}{\Delta y}.$$

Im Grenzwert  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  erhalten wir die Quelldichte im Punkt  $(x, y)$  zu

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y) = \operatorname{div} \mathbf{v}(x, y).$$



Sei nun  $B$  ein Gebiet mit Randkurve  $\partial B$ , im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Dann ist der Fluss des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  aus  $B$  hinaus gleich  $\int_{\partial B} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle$ . Andererseits ist die Strömungsbilanz im Bereich  $B$  durch das Integral über die Quelldichte gegeben, also durch  $\iint_B \operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) \, d(x, y)$ . Die Forderung der *Massenerhaltung* besagt demnach, dass der Nettoausfluss aus  $B$  hinaus gleich der Strömungsbilanz sein muss, also:

$$\iint_B \operatorname{div} \mathbf{v}(x, y) \, d(x, y) = \int_{\partial B} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle. \quad (5.1)$$

Dies ist die hydromechanische Bedeutung des Satzes von Gauß.

**Bemerkung 5.3** In Komponenten schreibt sich der Satz von Gauß in der Form

$$\iint_B \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \, d(x, y) = \int_{\partial B} v_1 \, dy - v_2 \, dx.$$

Führen wir das Vektorfeld  $\mathbf{u}$  ein durch  $u_1 = -v_2$ ,  $u_2 = v_1$ , so ist dies äquivalent mit

$$\iint_B \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \, d(x, y) = \int_{\partial B} u_1 \, dx + u_2 \, dy.$$

Damit ist die Formel

$$\iint_B \operatorname{rot} \mathbf{u}(x, y) \, d(x, y) = \int_{\partial B} \langle \mathbf{u}, d\mathbf{x} \rangle. \quad (5.2)$$

hergeleitet, welche als *Satz von Green* bezeichnet wird. Da die rechte Seite in Gleichung (5.2) die Zirkulation des Vektorfelds  $\mathbf{u}$  längs  $\partial B$  ist, kann man die Rotation des Vektorfelds als *Wirbelldichte* auffassen.

## 5.2 Beweis der Integralsätze

Wir müssen uns etwas genauer mit den ebenen Bereichen und deren Orientierung befassen, in denen die Integralsätze gelten. Zunächst betrachten wir verallgemeinerte Dreiecke der Form

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Wir setzen voraus, dass die obere Begrenzungsfunktion  $x \rightarrow \psi(x)$  auf  $[a, b]$  stetig und auf  $(a, b)$  stetig differenzierbar ist, dass  $\psi'(x) < 0$  ist für alle  $x \in (a, b)$  und dass  $\psi(b) = c$  gilt. Wir bezeichnen den Rand von  $A$  mit  $\partial A$ ; er besteht aus einer stückweise regulären, geschlossenen Kurve. Der Standardnormalvektor  $\mathbf{n}(t)$  existiert längs  $\partial A$  mit Ausnahme der drei Eckpunkte. Wir orientieren die Teilstücke der Randkurve so, dass  $\mathbf{n}(t)$  stets ins Äußere von  $A$  weist. Das heißt, in Durchlaufrichtung liegt  $A$  immer links von der Randkurve. In dieser Situation sagen wir, dass  $\partial A$  *positiv orientiert ist*. Eine Teilmenge  $B \subset \mathbb{R}^2$  bezeichnen wir als *positiv orientiertes verallgemeinertes Dreieck*, wenn sie sich aus einem Bereich  $A$  der obigen Form durch Drehung um 90, 180 oder 270 Grad erzeugen lässt und der Rand  $\partial B$  positiv orientiert ist.

Der Rand  $\partial B$  eines verallgemeinerten Dreiecks besteht aus drei aneinander gereihten regulären Kurvenstücken  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ . Das Kurvenintegral über  $\partial B$  ist als Summe der Teilintegrale zu verstehen:

$$\int_{\partial B} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle = \int_{\Gamma_1} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle + \int_{\Gamma_2} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle + \int_{\Gamma_3} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle.$$

**Definition 5.4** Eine Teilmenge  $B \subset \mathbb{R}^2$  heißt *positiv orientiertes (krummliniges) Polytop*, wenn sie sich als Vereinigung von positiv orientierten verallgemeinerten Dreiecken darstellen lässt:

- (a)  $B = \bigcup_{i=1}^r B_i$  mit positiv orientierten verallgemeinerten Dreiecken  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ ;
- (b) je zwei verschiedene Teilbereiche  $B_i, B_j$  dürfen sich nur an den jeweiligen Rändern überschneiden;
- (c)  $\partial B$  ist positiv orientiert.

**Bemerkung 5.5** Man beachte, dass der Rand von  $B$  eine Teilmenge der Vereinigung der Ränder der  $B_i$  ist; im Innern von  $B$  werden die gemeinsamen Ränder aneinander grenzender Teilbereiche je zweimal entgegengesetzt durchlaufen. Die Beiträge zum Kurvenintegral heben sich dort auf, wie wir sehen werden. Die Bedingung (c) hat zur Folge, dass die äußere Umrandung im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, während Berandungen von Löchern in  $B$  im Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

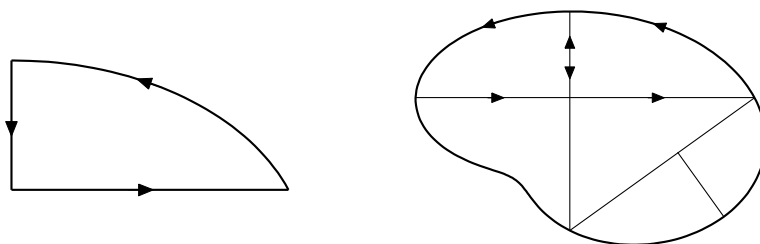


Abbildung 5.2: Verallgemeinertes Dreieck (links), positiv orientiertes Polytop (rechts).

**Bemerkung 5.6** Sei  $\Gamma$  eine Kurve mit Parametrisierung  $\mathbf{x}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Ersetzen wir die Parametrisierung durch

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(a + b - t), \quad a \leq t \leq b,$$

so erhalten wir eine in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve, die wir mit  $-\Gamma$  bezeichnen. Das Kurvenintegral wechselt dabei sein Vorzeichen:

$$\int_{-\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{y} \rangle = - \int_{\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle, \quad \int_{-\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle = - \int_{\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{n} \rangle.$$

Das liegt daran, dass  $\dot{\mathbf{y}}(t) = -\dot{\mathbf{x}}(a + b - t)$  ist und daher im Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{y} \rangle &= \int_a^b \langle \mathbf{v}(\mathbf{y}(t)), \dot{\mathbf{y}}(t) \rangle dt = - \int_a^b \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}(a + b - t)), \dot{\mathbf{x}}(a + b - t) \rangle dt \\ &= + \int_b^a \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}(\tau)), \dot{\mathbf{x}}(\tau) \rangle d\tau = - \int_a^b \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}(\tau)), \dot{\mathbf{x}}(\tau) \rangle d\tau = - \int_{\Gamma} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

gilt, wobei wir die Substitution  $\tau = a + b - t$  verwendet haben.

Nach dieser Vorarbeit sind wir nun in der Lage, Satz 5.1 zu beweisen.

**Schritt 1.** Wir beweisen den Satz von Green für positiv orientierte verallgemeinerte Dreiecke der Form

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq \psi(x)\},$$

wobei definitionsgemäß  $\psi' < 0$  und  $\psi(b) = c$  vorausgesetzt ist. Zu zeigen ist die Formel

$$\iint_A \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) d(x, y) = \int_{\partial A} v_1 dx + v_2 dy.$$

Wir zeigen

$$- \iint_A \frac{\partial v_1}{\partial y} d(x, y) = \int_{\partial A} v_1 dx;$$

die zweite Hälfte der Formel folgt in derselben Weise, wobei die Rollen von  $x$  und  $y$  zu tauschen sind und die obere Begrenzung als Funktion von  $y$  darzustellen ist. Wir schreiben den Rand  $\partial A$  von  $A$  als Summe der drei regulären Kurven  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  mit Parametrisierungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= [t, c]^T, & a \leq t \leq b; & & dx &= dt; \\ \mathbf{x}_2(t) &= [a + b - t, \psi(a + b - t)]^T, & a \leq t \leq b; & & dx &= -dt; \\ \mathbf{x}_3(t) &= [a, c + \psi(a) - t]^T, & c \leq t \leq \psi(a); & & dx &= 0. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{\partial A} v_1 dx = \int_a^b v_1(t, c) dt - \int_a^b v_1(a + b - t, \psi(a + b - t)) dt = \int_a^b v_1(t, c) dt - \int_a^b v_1(\tau, \psi(\tau)) d\tau.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} - \iint_A \frac{\partial v_1}{\partial y} d(x, y) &= - \int_a^b \int_c^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial y} v_1(x, y) dy dx \\ &= - \int_a^b v_1(x, \psi(x)) dx + \int_a^b v_1(x, c) dx, \end{aligned}$$

die beiden Integrale sind also identisch.

**Schritt 2.** Der Satz von Green gilt für positiv orientierte Polytope. Wir benützen einerseits die Bereichsadditivität des Riemann-Integrals, wonach das Integral über die Vereinigung  $B$  die Summe der Integrale über die verallgemeinerten Dreiecke  $B_i$  ist, und andererseits die Darstellung des Kurvenintegrals als Summe über die Teilkurven  $\partial B_i$  unter Beachtung von Bemerkung 5.6, wonach sich die gegenläufigen Teilintegrale im Innern wegheben:

$$\iint_B \mathbf{rot} \mathbf{v}(x, y) d(x, y) = \sum_{i=1}^r \iint_{B_i} \mathbf{rot} \mathbf{v}(x, y) d(x, y) = \sum_{i=1}^r \int_{\partial B_i} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle = \int_{\partial B} \langle \mathbf{v}, d\mathbf{x} \rangle.$$

**Schritt 3.** Herleitung des Satzes von Gauß aus dem Satz von Green – diese erzielt man mit der simplen Umrechnung in Bemerkung 5.3.  $\square$

### 5.3 Anwendungen der Integralsätze

In diesem Abschnitt werden wir unter einem Bereich  $B$  immer ein positiv orientiertes Polytop verstehen, ohne dies jedes Mal eigens zu betonen.

**Anwendung 5.7** (Flächenberechnung) Zur Berechnung des Flächeninhalts eines Bereiches  $B$  definieren wir ein Vektorfeld  $\mathbf{v}$  durch

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dann ist  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 1$ , und nach dem Satz von Gauß, geschrieben in Komponentenform wie in Bemerkung 5.3, gilt für den Flächeninhalt

$$\mu(B) = \iint_B d(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\partial B} x \, dy - y \, dx.$$

Ist zum Beispiel  $B$  der durch die Ellipse

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

berandete Bereich, so gilt

$$x \, dy - y \, dx = ab (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = ab \, dt \quad \text{und damit} \quad \mu(B) = ab\pi.$$

**Anwendung 5.8** (Green'sche Integralformeln) Es seien  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Eine leichte Rechnung zeigt

$$\operatorname{div} (f \nabla g) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g.$$

Andererseits besagt der Satz von Gauß:

$$\iint_B \operatorname{div} (f \nabla g) \, d(x, y) = \int_{\partial B} \langle f \nabla g, d\mathbf{n} \rangle = \int_{\partial B} f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle \, ds = \int_{\partial B} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, ds$$

wobei

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle$$

die so genannte äußere *Normalableitung* der Funktion  $g$  längs des Randes  $\partial B$  bezeichnet. Wir erhalten damit die 1. *Green'sche Formel*

$$\iint_B (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g) \, d(x, y) = \int_{\partial B} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, ds$$

bzw.

$$\iint_B \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d(x, y) = - \iint_B f \Delta g \, d(x, y) + \int_{\partial B} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, ds,$$

welche eine Art partieller Integration für den Laplaceoperator darstellt. Subtrahiert man von dieser Gleichung dieselbe Gleichung mit vertauschten Rollen von  $f$  und  $g$ , so ergibt sich die 2. *Green'sche Formel*

$$\iint_B (f \Delta g - g \Delta f) \, d(x, y) = \int_{\partial B} \left( f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) \, ds.$$

**Anwendung 5.9** (Potentialfelder) Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein sternförmiges Gebiet und  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Im Abschnitt 4.3.3 wurde angemerkt, dass  $\mathbf{v}$  genau dann ein Potential  $\Psi : D \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt, wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, das heißt

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \quad (5.3)$$

ist. Ein Vektorfeld heißt *wirbelfrei*, wenn es (5.3) erfüllt. Ein wirbelfreies Vektorfeld besitzt in sternförmigen Gebieten ein Potential:

$$-\operatorname{grad} \Psi = \mathbf{v}.$$

Gilt für ein Vektorfeld

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (5.4)$$

so wird dieses Vektorfeld als *quellenfrei* bezeichnet. Das Potential eines wirbel- und quellenfreien Feldes erfüllt daher die *Potentialgleichung*

$$-\Delta \Psi = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi = 0.$$

Besitzt das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  einer ebenen Strömung ein Potential  $\Psi$ , so nennt man  $\Psi$  ihr *Geschwindigkeitspotential* und die Strömung selbst eine *Potentialströmung*.

**Beispiel 5.10** Die ebene Potentialströmung um einen Zylinder vom Radius 1 besitzt das Geschwindigkeitspotential

$$\Psi(x, y) = v_\infty \left( -x - \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

mit der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = [v_\infty \ 0]^\top$  im Unendlichen. Das Geschwindigkeitsfeld

$$v_1(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y) = v_\infty \left( 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad v_2(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y) = v_\infty \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

und einige Stromlinien sind aus Abbildung 5.3 ersichtlich.

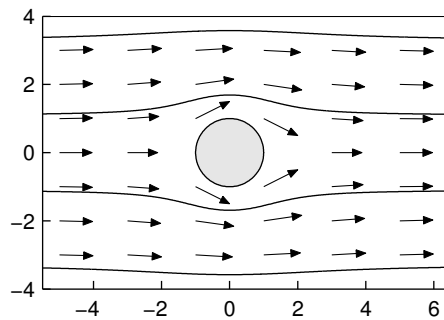


Abbildung 5.3: Ebene Potentialströmung um Zylinder.

**Anwendung 5.11** (Die Kontinuitätsgleichung) Wir betrachten die ebene Strömung einer Flüssigkeit oder eines Gases, diesmal allerdings von räumlich variabler und zeitabhängiger Dichte  $\rho(x, y, t)$ . Auch die Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}(x, y, t)$  möge von der Zeit  $t$  abhängen. Die *Kontinuitätsgleichung* ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (5.5)$$

wobei die Divergenz sich auf die räumlichen Koordinaten bezieht:

$$\mathbf{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_2).$$

Die Kontinuitätsgleichung ist eine der Grundgleichungen der Hydrodynamik und beschreibt das Prinzip der *lokalen Massenerhaltung*. Sie kann mit Hilfe des Satzes von Gauß hergeleitet werden. Betrachten wir dazu einen Bereich  $B \subset \mathbb{R}^2$ . Die Gesamtmasse im Bereich  $B$  zum Zeitpunkt  $t$  ist

$$\iint_B \rho(x, y, t) \, d(x, y);$$

der Massenfluss aus  $B$  hinaus ist

$$\int_{\partial B} \langle \rho(x, y, t) \mathbf{v}(x, y, t), d\mathbf{n} \rangle.$$

In einem (kleinen) Zeitintervall  $\Delta t$  ist die Massenänderung – bei Abwesenheit von Quellen oder Senken – näherungsweise gleich dem Nettoabfluss während des Zeitintervalls  $\Delta t$ , also

$$\iint_B (\rho(x, y, t + \Delta t) - \rho(x, y, t)) \, d(x, y) \approx -\Delta t \int_{\partial B} \langle \rho(x, y, t) \mathbf{v}(x, y, t), d\mathbf{n} \rangle.$$

Division durch  $\Delta t$ , Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  und Anwendung des Satzes von Gauß ergibt

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, t) \, d(x, y) &= - \int_{\partial B} \langle \rho(x, y, t) \mathbf{v}(x, y, t), d\mathbf{n} \rangle \\ &= - \iint_B \mathbf{div} (\rho(x, y, t) \mathbf{v}(x, y, t)) \, d(x, y). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\iint_B \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, t) + \mathbf{div} (\rho(x, y, t) \mathbf{v}(x, y, t)) \right) d(x, y) = 0.$$

In dieser Herleitung ist der Bereich  $B$  beliebig. Wenn die Integrale einer Funktion über beliebige Bereiche verschwinden, so muss aber die Funktion selbst (der Integrand) überall gleich Null sein. Das ist gerade die Aussage der Kontinuitätsgleichung (5.5).

Im Allgemeinen wird die Kontinuitätsgleichung in der Hydrodynamik durch weitere Gleichungen, wie etwa die Impulserhaltung oder die Erhaltung der inneren Energie, zu einem System von Differentialgleichungen ergänzt. Es gibt jedoch zwei Spezialfälle, in der die Kontinuitätsgleichung auf eine einzelne skalare Gleichung für  $\rho(x, y, t)$  führt.

**Beispiel 5.12** (Die Transportgleichung) Falls die Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]^T$  konstant ist, so lautet die Kontinuitätsgleichung (5.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, t) + v_1 \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, y, t) + v_2 \frac{\partial}{\partial y} \rho(x, y, t) = 0. \quad (5.6)$$

Ist zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Anfangsdichte  $\rho_0(x, y)$  gegeben, so hat die Transportgleichung die Lösung

$$\rho(x, y, t) = \rho_0(x - v_1 t, y - v_2 t),$$

wie man durch Ableiten nach der Kettenregel leicht überprüft. Die Anfangsdichte verschiebt sich also mit Geschwindigkeit  $v_1$  in  $x$ -Richtung und mit Geschwindigkeit  $v_2$  in  $y$ -Richtung.

**Beispiel 5.13** (Die Diffusionsgleichung) Das Produkt aus Dichte und Strömungsgeschwindigkeit in Gleichung (5.5) ist der Massenfluss  $\Phi = \rho \mathbf{v}$ . In dieser Notation lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \mathbf{div} \Phi = 0.$$

Diffusion liegt vor, falls der Massenfluss proportional zum stärksten Gefälle der Dichte ist, also  $\Phi = -K \mathbf{grad} \rho$  gilt. Dies führt auf die so genannte *Diffusionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho - K \mathbf{div} \mathbf{grad} \rho = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho - K \Delta \rho = 0$$

mit dem Laplaceoperator  $\Delta$ , ausgeschrieben

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, t) - K \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho(x, y, t) \right) = 0. \quad (5.7)$$

Diese Gleichung beschreibt auch den Temperaturverlauf in einem zweidimensionalen Gebiet und wird daher auch als *Wärmeleitungsgleichung* bezeichnet.

Die Transport- und die Diffusionsgleichung kann natürlich auch in ein oder drei Raumdimensionen formuliert werden, Die Diffusionsgleichung lautet dann etwa

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) - K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) = 0$$

in einer Dimension bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z, t) - K \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rho(x, y, z, t) \right) = 0$$

in drei Dimensionen.

# Kapitel 6

## Oberflächenintegrale und der Satz von Stokes

### 6.1 Flächen im Raum

Im Abschnitt 3.2 (Mathematik 1) untersuchten wir Flächenstücke als Graphen einer Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Ähnlich wie im Fall von Kurven ist dieses Konzept jedoch zu eng, um komplexere Flächen darzustellen. Der Ausweg besteht wie bei Kurven darin, Parametrisierungen zu betrachten.

Ausgangspunkt für die Konstruktion eines parametrisierten Flächenstücks ist eine (komponentenweise) stetige Abbildung

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

eines Parameterbereichs  $D \subset \mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^3$ . Durch Festhalten jeweils eines Parameters  $u = u_0$  oder  $v = v_0$  erhält man Raumkurven

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \mathbf{x}(u, v_0) && \dots && u\text{-Linie} \\ v &\rightarrow \mathbf{x}(u_0, v) && \dots && v\text{-Linie} \end{aligned}$$

**Definition 6.1** Ein reguläres parametrisiertes Flächenstück wird durch eine Abbildung  $D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v)$  definiert, welche die folgenden Bedingungen erfüllt

- (a) die Abbildung  $(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v)$  ist injektiv;
- (b) die  $u$ -Linien und die  $v$ -Linien sind stetig differenzierbar;
- (c) die Tangentenvektoren an die  $u$ - und  $v$ -Linien sind in jedem Punkt linear unabhängig (spannen also stets eine Ebene auf).



Diese Bedingungen garantieren, dass es sich tatsächlich um eine zweidimensionale, flächig-glatte Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  handelt. Weiters werden durch Bedingung (a) Durchdringungen und Überschneidungen vermieden.

**Beispiel 6.2** (Drehflächen) Durch Rotation des Graphen einer stetig differenzierbaren, positiven Funktion  $z \rightarrow h(z)$ ,  $a < z < b$ , um die  $z$ -Achse ergibt sich eine Drehfläche mit Parametrisierung

$$D = (a, b) \times (0, 2\pi), \quad \mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} h(u) \cos v \\ h(u) \sin v \\ u \end{bmatrix}.$$

Die  $v$ -Linien sind horizontale Kreise, die  $u$ -Linien sind die Mantellinien. Man beachte, dass die Mantellinie zum Winkel  $v = 0$  herausgenommen ist, um Bedingung (a) zu gewährleisten. Zum Überprüfen der Bedingung (c) berechnen wir das Kreuzprodukt der Tangentenvektoren an die  $u$ - und  $v$ -Linie

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \begin{bmatrix} h'(u) \cos v \\ h'(u) \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -h(u) \sin v \\ h(u) \cos v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h(u) \cos v \\ -h(u) \sin v \\ h(u) h'(u) \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Dieser Vektor ist wegen  $h(u) > 0$  nicht Null; die beiden Tangentenvektoren sind somit nicht kollinear.

Abb. 6.1 zeigt die Drehfläche, die mittels  $h(u) = 0.4 + \cos(4\pi u)/3$ ,  $u \in (0, 1)$ , erzeugt wird.

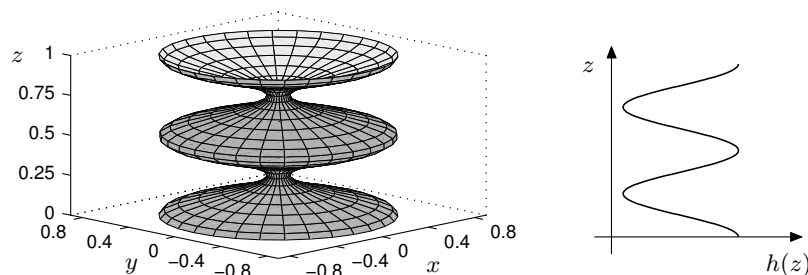


Abbildung 6.1: Drehfläche durch Rotation eines Graphen  $h(z)$  um die  $z$ -Achse. Der zugrunde liegende Graph  $h(z)$  ist rechts dargestellt.

**Beispiel 6.3** (Die Sphäre) Die Oberfläche einer Kugel vom Radius  $R$  erhält man durch die Parametrisierung

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi), \quad \mathbf{x}(u, v) = R \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}.$$

Die  $v$ -Linien sind die Breitenkreise, die  $u$ -Linien die Meridiane (Längengrade). Die Bedeutung der Parameter  $u, v$  als Winkel ist Abb. 6.2 zu entnehmen.

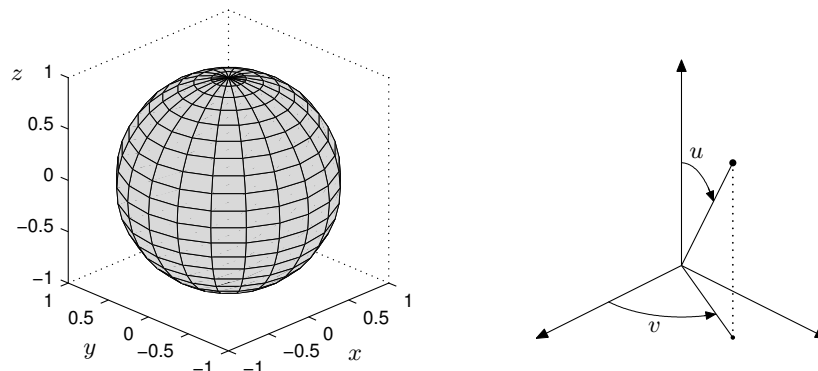


Abbildung 6.2: Die Oberfläche der Kugel mit Radius 1 als parametrisierte Fläche. Die Interpretation der Parameter  $u, v$  als Winkel ist im rechten Bild dargestellt.

**Tangentialebene und Flächennormale.** Die Koordinatenlinien ( $u$ -Linien,  $v$ -Linien) sind reguläre Kurven auf dem Flächenstück. Diese Kurven besitzen die Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Die Bedingung (c) von Def. 6.1 garantiert, dass die beiden Tangentialvektoren stets linear unabhängig sind. Die *Tangentialebene* im Punkt  $\mathbf{x}(u, v)$  an die Fläche besitzt somit die Parameterdarstellung

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}(u, v) + \lambda \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) + \mu \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**Definition 6.4** Der auf die Tangentialebene senkrecht stehende Einheitsvektor

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|} \quad (6.2)$$

heißt *Flächennormale* im Punkt  $\mathbf{x}(u, v)$ . Die drei Vektoren

$$\mathbf{e}_u = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\|}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|}, \quad \boldsymbol{\nu} \quad (6.3)$$

nennt man *begleitendes* (oder *Gauß'sches*) *Dreibein* der Fläche. Das begleitende Dreibein ist ein *Rechtssystem*, d.h.  $\det(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \boldsymbol{\nu}) > 0$ .

**Beispiel 6.5** Wir parametrisieren die Kugeloberfläche mit Kugelkoordinaten

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}, \quad 0 < v < 2\pi, \quad 0 < u < \pi.$$

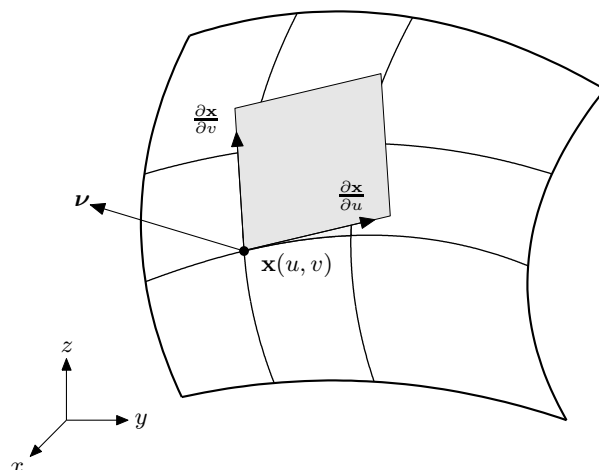


Abbildung 6.3: Tangentialebene, Normalenvektor und begleitendes Dreibein.

wobei wir den Nullmeridian (Längenkreis  $v = 0$ ) zusammen mit den zwei Polen entfernt haben. Dann ist

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = R \begin{bmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = R \begin{bmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

und weiters

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = R^2 \sin u \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

Wegen  $0 < u < \pi$  ist  $\sin u > 0$  und damit

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix},$$

was auch ohne Rechnung direkt aus der Parameterdarstellung folgt.

## 6.2 Oberflächenintegrale

Im Abschnitt 6.1 haben wir Flächenstücke im Raum eingeführt. Diese sind durch eine Parameterdarstellung

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

gegeben, wobei  $(u, v)$  aus einem Parameterbereich  $D \subset \mathbb{R}^2$  stammen. Wie man skalare Belegungen und Vektorfelder längs Kurven integrieren kann, so auch über Flächenstücke. Das Flächenstück bezeichnen wir mit

$$S = \mathbf{x}(D).$$

### 6.2.1 Oberflächenintegrale erster Art

Bei den Oberflächenintegralen erster Art geht es um die Integration von skalaren Belegungen auf einem Flächenstück, benötigt für die Oberflächen-, Massen- und Momentenberechnung. Wir erinnern an die Definition der Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}$$

und der Flächennormale

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|} \quad (6.4)$$

Zunächst wollen wir die Oberfläche (den Inhalt) des Flächenstücks berechnen. Nehmen wir einen Punkt  $\mathbf{x}(u, v)$  auf der Fläche  $S$  und betrachten wir das kleine Flächenstück  $\Delta S$ , welches durch die vier Koordinatenlinien durch  $(u, v)$ ,  $(u + \Delta u, v)$ ,  $(u, v + \Delta v)$  und  $(u + \Delta u, v + \Delta v)$  begrenzt wird. Dieses wird näherungsweise durch das Parallelogramm approximiert, das von den beiden Tangentenvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \Delta u \approx \mathbf{x}(u + \Delta u, v) - \mathbf{x}(u, v), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \Delta v \approx \mathbf{x}(u, v + \Delta v) - \mathbf{x}(u, v)$$

aufgespannt wird, vgl. Abb. 6.4. Dessen Flächeninhalt ist näherungsweise gleich

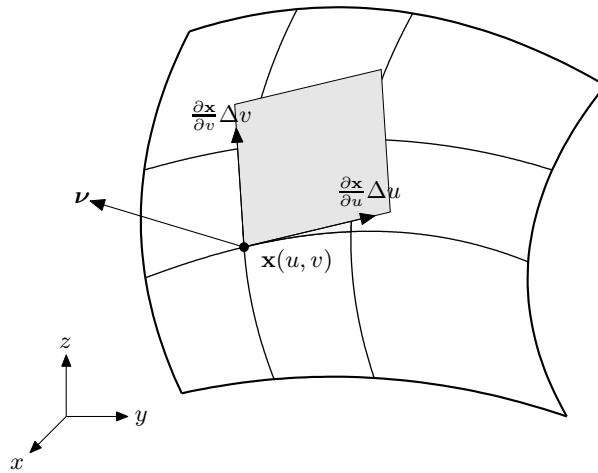


Abbildung 6.4: Zur Berechnung des Flächeninhalts.

$$\omega(\Delta S) \approx \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Eine Näherung an die Gesamtfläche  $\omega(S)$  erhält man, indem man ein Gitter durch Punkte  $(u_i, v_j)$  in  $D$  legt und über alle Teile summiert:

$$\omega(S) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega(\Delta S_{ij}) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u \Delta v.$$

Das ist gerade eine Riemannsumme für das Bereichsintegral

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v)$$

mit den Stützstellen  $(u_i, v_j)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Dieses Integral definiert den Inhalt der Gesamtfläche von  $\omega(S)$ .

Wir wollen eine etwas handlichere Darstellung dieser Formel herleiten. Dazu definieren wir nach Gauß die *metrischen Fundamentalgrößen* des parametrisierten Flächenstücks durch

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) \right\rangle \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) \right\rangle \\ \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) \right\rangle. \end{aligned}$$

Die Matrix

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

heißt *metrischer Tensor* des parametrisierten Flächenstücks. Eine Matrix der Bauart (6.5) nennt man eine *Gram'sche Matrix*. Für ihre Determinante gilt

$$\begin{aligned} \det \mathbf{g} &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \cos^2 \angle(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \sin^2 \angle(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \\ &= \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 \end{aligned}$$

Die Wurzel aus der Gram'schen Determinante ist also gleich der Länge des Normalvektors  $\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|$ . Wir schreiben weiter für die Gram'sche Determinante kurz  $g(u, v) = \det \mathbf{g}(u, v)$  und erhalten

$$\sqrt{g(u, v)} = \sqrt{\det \mathbf{g}(u, v)} = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|. \quad (6.6)$$

Man nennt den Ausdruck

$$dS = \sqrt{g(u, v)} d(u, v)$$

das Flächenelement (oder auch Oberflächenelement) des parametrisierten Flächenstücks.

**Definition 6.6** Sei  $S = \mathbf{x}(D) \subset \mathbb{R}^3$  ein reguläres Flächenstück,  $g$  die Determinante der Gram'schen Matrix der Parametrisierung und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige skalare Belegung von  $S$ . Dann nennt man

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\mathbf{x}(u, v)) \sqrt{g(u, v)} d(u, v) \quad (6.7)$$

*Oberflächenintegral erster Art* von  $f$  über  $S$ .

**Anwendung 6.7** (a) Der *Flächeninhalt* von  $S$  ist

$$\omega(S) = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{g(u, v)} d(u, v).$$

(b) Falls auf dem Flächenstück eine Dichte  $\rho(\mathbf{x})$  gegeben ist, so ist

$$M = \iint_S \rho dS = \iint_D \rho(\mathbf{x}(u, v)) \sqrt{g(u, v)} d(u, v)$$

die Gesamtmasse des Flächenstücks.

**Beispiel 6.8** Wir wollen die Mantelfläche eines Zylinders  $S$  vom Radius  $R$  und der Höhe  $H$  berechnen. Als Parametrisierung verwenden wir Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R \cos v \\ R \sin v \\ u \end{bmatrix}, \quad D = (0, H) \times (0, 2\pi), \quad S = \mathbf{x}(D).$$

Für die metrischen Größen gilt

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \begin{bmatrix} -R \sin v \\ R \cos v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(u, v) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle & \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}.$$

Es folgt  $\sqrt{g(u, v)} = R$  und somit ist die Fläche des Mantels

$$\omega(S) = \iint_D \sqrt{g(u, v)} d(u, v) = \int_0^H \int_0^{2\pi} R dv du = 2R\pi H.$$

**Beispiel 6.9** (Drehflächen) In Beispiel 6.2 betrachteten wir Drehflächen  $S$ , parametrisiert mittels

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} h(u) \cos v \\ h(u) \sin v \\ u \end{bmatrix}, \quad D = (a, b) \times (0, 2\pi).$$

Wir haben dort bereits

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -h(u) \cos v \\ -h(u) \sin v \\ h(u) h'(u) \end{bmatrix}$$

berechnet. Demnach ist

$$g(u, v) = h(u)^2 (h'(u)^2 + 1)$$

und wegen  $h(u) > 0$  gilt für die Fläche des Mantels

$$\omega(S) = \iint_B \sqrt{g(u, v)} d(u, v) = 2\pi \int_a^b h(u) \sqrt{1 + h'(u)^2} du.$$

## 6.2.2 Oberflächenintegrale zweiter Art

Wir betrachten ein stetiges Vektorfeld  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , welches etwa die (örtlich variable) Strömungsgeschwindigkeit einer strömenden Substanz (Flüssigkeit, Gas, ...) modelliert. Um den Durchfluss der Substanz durch ein reguläres Flächenstück  $S = \mathbf{x}(D)$  zu berechnen, gehen wir wie folgt vor. Wir betrachten ein kleines Teilflächenstück  $\Delta S$ . Wie

im Abschnitt 5.1 hergeleitet, erhält man den Fluss durch das kleine Teilflächenstück mit Hilfe der Normalkomponente der Geschwindigkeit zu

$$\Phi(\Delta S) = \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \Delta S,$$

wobei  $\boldsymbol{\nu}$  die Einheitsnormale auf  $\Delta S$  bedeutet. Wir nähern die Fläche  $S$  durch kleine Teilflächenstücke um Punkte  $\mathbf{x}(u_i, v_j)$  an. Durch Summation ergibt sich als Näherung für den Gesamtfluss

$$\Phi(S) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(u_i, v_j)), \boldsymbol{\nu}_i \rangle \Delta S,$$

was wiederum als Riemannsumme für ein Integral aufgefasst werden kann.

**Definition 6.10** Sei  $S = \mathbf{x}(D) \subset \mathbb{R}^3$  ein reguläres Flächenstück und  $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetiges Vektorfeld auf  $S$ . Dann nennt man

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle dS = \iint_D \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(u, v)), \boldsymbol{\nu}(u, v) \right\rangle \sqrt{g(u, v)} d(u, v) \quad (6.8)$$

*Oberflächenintegral zweiter Art* von  $\mathbf{F}$  über  $S$  oder auch *Flussintegral*.

Erinnern wir uns an die Definition der Flächennormale  $\boldsymbol{\nu}$  in (6.4) und an die Formel (6.6) für  $\sqrt{g(u, v)}$ , so sehen wir, dass das Oberflächenintegral auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \iint_D \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(u, v)), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle d(u, v).$$

Der Ausdruck

$$d\mathbf{S} = \boldsymbol{\nu} dS = \boldsymbol{\nu} \sqrt{g(u, v)} d(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} d(u, v)$$

heißt *vektorielles Flächenelement* der Parametrisierung.

**Beispiel 6.11** Wir berechnen den Fluss  $\Phi(S)$  des Geschwindigkeitsfelds

$$\mathbf{F}(x, y, z) = [x, y, 2]^\top$$

durch die obere Halbsphäre vom Radius  $R$  (von innen nach außen). Wir verwenden die Koordinaten von Beispiel 6.5:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}, \quad 0 < v < 2\pi, \quad 0 < u < \pi/2.$$

Dort haben wir die Flächennormale bereits berechnet:

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}$$

und wir erhalten

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} R \sin u \cos v \\ R \sin u \sin v \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix} \right\rangle = R \sin^2 u + 2 \cos u.$$

Aus Beispiel 6.5 erhalten wir ebenso

$$dS = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, d(u, v) = R^2 \sin u \, d(u, v)$$

und es folgt

$$\Phi(S) = \iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (R^3 \sin^3 u + 2R^2 \cos u \sin u) \, du \, dv = \frac{4}{3} R^3 \pi + 2R^2 \pi.$$

## 6.3 Die Integralsätze von Stokes und Gauß im Raum

Der Satz von Stokes stellt eine Beziehung zwischen einem Oberflächenintegral zweiter Art auf  $S$  mit einem Kurvenintegral entlang der Randkurve  $\partial S$  her, während der Satz von Gauß im Raum eine Beziehung zwischen Volumenintegralen und Oberflächenintegralen herstellt.

### 6.3.1 Der Satz von Stokes

Wir gehen wieder von einem regulären Flächenstück  $S = \mathbf{x}(D)$

$$(u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

aus, wobei  $(u, v)$  aus dem Parameterbereich  $D \subset \mathbb{R}^2$  stammen. Der Parameterbereich  $D$  hat seinerseits eine Randkurve  $\partial D$

$$t \rightarrow \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad a \leq t \leq b.$$

Wir setzen voraus, dass die Randkurve  $\partial D$  positiv orientiert ist (und stückweise regulär). Setzen wir die Randkurve in die Flächenparametrisierung ein, so erhalten wir eine Kurve  $\Gamma$  im Raum, die wir als *orientierte Randkurve* des Flächenstücks  $S$  bezeichnen. Ihre Parametrisierung ist

$$t \rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{u}(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Wir wollen nun das Flächenstück  $S$  selbst passend orientieren. Man hat *zwei* Möglichkeiten, die Flächennormale  $\boldsymbol{\nu}$  zu definieren

$$\boldsymbol{\nu} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|}.$$



Durch die (einheitliche) Wahl des Vorzeichens zeichnet man eine Seite des Flächenstücks aus (Oberseite bzw. Unterseite). Man spricht in diesem Zusammenhang von Orientierung der Fläche. Jede Orientierung induziert mittels der Rechtsschraubregel einen natürlichen „Umlaufsinn“ auf der Fläche. Man nennt die Orientierung der Fläche mit jener der Randkurve *verträglich*, wenn beide denselben Umlaufsinn haben.

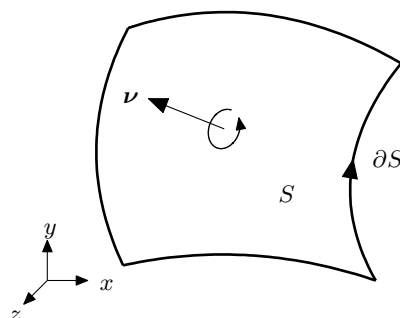


Abbildung 6.5: Verträgliche Orientierungen.

**Beispiel 6.12** Der Funktionsgraph  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)$  besitzt die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Parametrisierung der Randkurve  $\partial S$  von  $S$  lautet damit

$$t \rightarrow [u(t), v(t), f(u(t), v(t))]^\top.$$

Sie ist verträglich mit der durch  $\boldsymbol{\nu}$  induzierten Orientierung.

**Beispiel 6.13** Eine Parametrisierung der oberen Halbsphäre mit Radius  $R$  lautet

$$D = (0, \pi/2) \times (0, 2\pi), \quad \mathbf{x}(u, v) = R \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}.$$

Die positiv orientierte Randkurve von  $S = \mathbf{x}(D)$  lautet

$$\mathbf{x}(t) = R \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ihre Orientierung ist mit der durch  $\boldsymbol{\nu}$  induzierten verträglich.

**Satz 6.14** (Satz von Stokes für reguläre Flächenstücke) Sei  $S$  ein reguläres, zweimal stetig differenzierbares Flächenstück im Raum und  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Falls die Orientierung von  $S$  verträglich mit jener des Randes  $\partial S$  ist, gilt

$$\int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \iint_S \langle \mathbf{rot} \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle.$$

*Beweis:* Der Beweis wird geführt, indem alle Integrale auf solche über den Parameterbereich  $D$  und dessen Rand  $\partial D$  transformiert werden und dort der Satz von Green in der Ebene (Satz 5.1) angewendet wird. Die Details werden hier nicht ausgeführt.  $\square$

**Beispiel 6.15** Wir wollen den Satz von Stokes für die obere Halbsphäre aus Beispiel 6.13 und das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

nachrechnen. Die Flächennormale  $\boldsymbol{\nu}$  entnehmen wir Beispiel 6.13; das Oberflächenelement  $dS = R^2 \sin u$  haben wir in Beispiel 6.11 berechnet. Somit gilt

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \mathbf{rot} \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \iint_S \langle \mathbf{rot} \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle dS \\ &= \iint_S \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix} \right\rangle dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \cos u R^2 \sin u \, du \, dv = 2\pi R^2 \sin^2 u \Big|_0^{\pi/2} = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Längs der Randkurve  $\partial S$  gilt:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = R \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = R^2.$$

Wir erhalten

$$\int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2,$$

wie gewünscht.

### 6.3.2 Der Satz Gauß im Raum

Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und ein räumlicher Bereich  $V$ , dessen Rand  $\partial V$  durch eine stückweise reguläre Fläche gegeben ist. Schließlich bezeichne  $\boldsymbol{\nu}$  die nach außen gerichtete Flächennormale. Der Satz von Gauß besagt dann:

$$\iiint_V \mathbf{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle dS.$$

So einfach diese Formulierung ist, so verstecken sich doch einige Schwierigkeiten im Detail, nämlich in der Geometrie des Bereichs. Zur Präzisierung gehen wir hier einen synthetischen Weg, bei dem wir von krummlinigen Tetraedern ausgehen und die zugelassenen Bereiche  $V$  aus diesen zusammensetzen. Wir betrachten zunächst einen abgeschlossenen Bereich der Form

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Ähnlich wie im ebenen Fall setzen wir voraus, dass die Begrenzungsfunktion  $x \rightarrow \psi(x)$  auf  $[0, a]$  stetig und auf  $(0, a)$  stetig differenzierbar ist, dass  $\psi'(x) < 0$  ist für alle  $x \in (0, a)$  und dass  $\psi(a) = 0$  gilt. Wir definieren den dreidimensionalen Bereich

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq \varphi(x, y)\},$$

wobei  $\varphi$  in einer Umgebung von  $A$  definiert und stetig differenzierbar sein soll. Außerdem soll  $\varphi$  längs der oberen Randkurve von  $A$  gleich Null sein, also  $\varphi(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in A, y = \psi(x)$ . Der Rand des Bereichs  $D$  besteht aus der (eventuell gekrümmten) Deckfläche  $S^D$  und den ebenen Grund-, Vorder- und Seitenflächenstücken  $S^G, S^V, S^S$ . Die nach außen weisenden Flächennormalen sind

$$\boldsymbol{\nu}^D = \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1}} \begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}^G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}^V = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}^S = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diese Orientierung der Flächennormalen erhält man durch geeignete Wahl der Parametrisierungen. Für die Deckfläche  $S^D$  wählt man etwa

$$\mathbf{x}^D : \{(u, v) : 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq \psi(u)\} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^D(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi(u, v) \end{bmatrix},$$

für die Grundfläche

$$\mathbf{x}^G : \{(u, v) : 0 \leq v \leq a, 0 \leq u \leq \psi(v)\} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^G(u, v) = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix}$$

und analog für die Vorder- und Seitenfläche.

In Analogie zum ebenen Fall nennen wir eine Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^3$  ein *positiv orientiertes verallgemeinertes Tetraeder*, wenn sie sich aus einem Bereich  $D$  der obigen Form durch Drehung um 90, 180 oder 270 Grad um eine der Koordinatenachsen und anschließender Translation erzeugen lässt.

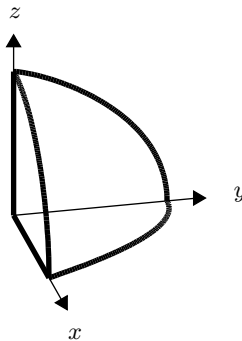


Abbildung 6.6: Verallgemeinertes Tetraeder.

**Definition 6.16** Eine Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^3$  heißt *positiv orientiertes (krummliniges) Polyeder*, wenn sie sich als Vereinigung von positiv orientierten verallgemeinerten Tetraedern darstellen lässt mit:

- (a)  $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$  mit positiv orientierten verallgemeinerten Tetraedern  $V_i, i = 1, \dots, r$ ;

- (b) für  $i \neq j$  ist  $V_i \cap V_j$  entweder leer, null- oder eindimensional oder besteht zur Gänze aus einer gemeinsamen Randfläche der verallgemeinerten Tetraeder  $V_i$  und  $V_j$ .

**Bemerkung 6.17** Die Definition hat zur Folge, dass der (topologische) Rand von  $V$  ausschließlich aus Randflächen einiger der Teiltetraeder besteht. Da diese positiv orientiert sind, weist damit die Flächennormale auf  $\partial V$ , wo sie definiert ist, nach außen. Überschneiden sich zwei Teiltetraeder im Innern von  $V$  in einer ganzen Randfläche, so sind die beiden zugehörigen Flächennormalen entgegengesetzt orientiert. Für ein stetiges Vektorfeld  $\mathbf{F}$  ist das Flächenintegral als Summe zu verstehen:

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle dS = \sum_{i=1}^r \iint_{\partial V_i} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle dS.$$

Jede der Teilrandflächen  $\partial V_i$  ist ein reguläres Flächenstück mit Flächennormale  $\boldsymbol{\nu}$  und Flächenelement  $dS$ . Die Integrale über die gemeinsamen Teilrandflächen im Innern heben sich in der Summe weg.

**Satz 6.18** (Satz von Gauß im Raum) Es sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  ein positiv orientiertes krummliniges Polyeder,  $\mathbf{F}$  ein in einer Umgebung von  $V$  definiertes und stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle dS,$$

wobei  $\boldsymbol{\nu}$  die nach außen weisende Flächennormale auf  $\partial V$  bezeichnet.

*Beweis:* Der Beweis erfolgt wie im ebenen Fall zunächst für positiv orientierte verallgemeinerte Tetraeder und wird anschließend durch Summation für positiv orientierte krummlinige Polyeder gezeigt. Auch hier unterlassen wir die Darstellung der Details.  $\square$

**Beispiel 6.19** Wir wollen den Satz von Gauß für die Halbkugel und das Vektorfeld aus Beispiel 6.15 nachrechnen:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = 1.$$

Wir stellen die Halbkugel als Normalgebiet in Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  dar:

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - r^2}\}$$

und erhalten unter Verwendung des Flächenelements  $r d\varphi dr$  (vgl. Satz 2.27)

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) d(x, y, z) &= \iiint_V d(x, y, z) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} dz r d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr = -\frac{2\pi}{3} (R^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

was natürlich dem Volumen der Halbkugel entspricht.

Die Oberfläche der  $\partial V$  Halbkugel zerfällt in die Halbsphäre  $S$  nach Beispiel 6.13, wo wir die Flächennormale  $\boldsymbol{\nu}$  bereits berechnet haben, und die kreisförmige Grundfläche  $G$  mit Parametrisierung und Flächennormale

$$\mathbf{x}^G(u, v) = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -R \leq v \leq R, \quad -\sqrt{R^2 - v^2} \leq u \leq \sqrt{R^2 - v^2}, \quad \boldsymbol{\nu}^G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -R \sin u \sin v \\ R \sin u \cos v \\ R \cos u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix} \right\rangle = R \cos^2 u; \quad \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}^G \rangle = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, dS &= \iint_S \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, dS + \iint_G \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R \cos^2 u \, R^2 \sin u \, du \, dv + 0 \\ &= -\frac{2\pi R^3}{3} \cos^3 u \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2\pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

# Kapitel 7

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 7.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen sind Gleichungen zwischen einer (gesuchten) Funktion und deren Ableitungen. Wir betrachten zunächst Differentialgleichungen, die zeitabhängige Vorgänge beschreiben. Wir bezeichnen die Zeit mit  $t$  und die gesuchte Funktion mit  $x(t)$ .

**Beispiel 7.1** (a) Der lineare Einmassenschwinger. Die Auslenkung  $x(t)$  einer Punktmasse  $m$  aus der Ruhelage unter Einwirkung einer Feder der Steifigkeit  $k$  wird durch die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = p(t)$$

beschrieben. Dabei ist  $r$  der Reibungs- oder Dämpfungskoeffizient und  $p(t)$  eine äußere Anregung.

(b) Der senkrechte Wurf kann durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -g$$

beschrieben werden,  $x(t)$  die Höhe über Grund,  $g$  die Erdbeschleunigung.

(c) Unbegrenztes Wachstum. Es bezeichne  $x(t)$  eine Bevölkerungszahl (Individuen, Bakterien o. Ä.) zum Zeitpunkt  $t$ . Die Änderung der Gesamtzahl im Zeitintervall  $\Delta t$  ist  $x(t + \Delta t) - x(t)$ . Mittels Division durch  $\Delta t$  erhält man die durchschnittliche Änderung pro Zeiteinheit; Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  ergibt mit

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

die momentane Änderungsrate im Zeitpunkt  $t$ . Ist diese proportional zur vorhandenen Bevölkerung, so erhält man die Differentialgleichung unbegrenzten Wachstums

$$\dot{x}(t) = kx(t) \tag{7.1}$$

mit der Proportionalitätskonstanten  $k > 0$ . Eine gänzlich andere Anwendung ergibt sich für  $k < 0$ . Dann beschreibt die Gleichung (7.1) einen Prozess kontinuierlicher Abnahme, zum Beispiel den Zerfall einer radioaktiven Substanz der Gesamtmenge  $x(t)$ .

Allgemein ist eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung eine Gleichung der Form

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

für eine gesuchte Funktion  $x(t)$  der unabhängigen Variablen  $t$ . Zur eindeutigen Lösbarkeit braucht man noch *Nebenbedingungen*, zum Beispiel *Anfangswerte* zu einem festen Zeitpunkt  $t_0$ :

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1, \dots$$

oder *Randwerte*

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b$$

auf einem Intervall  $[a, b]$ .

In allen bisherigen Beispielen war die unabhängige Variable die Zeit. Dies muss im Allgemeinen nicht sein; oft bezeichnet man die unabhängige Variable mit  $x$  und sucht eine Lösungsfunktion  $y = y(x)$  einer Differentialgleichung

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x) \dots) = 0.$$

**Beispiel 7.2** In der Seilstatik wird die Gleichung der Kettenlinie (Auslenkung eines biegeweichen Seils unter Eigengewicht  $q_0$  und Horizontalkomponente  $X_0$  der Seilkraft) hergeleitet:

$$z''(x) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + (z'(x))^2}$$

mit  $\alpha = X_0/q_0$ .

Falls es mehrere unabhängige Variable  $x_1, \dots, x_m$  gibt und partielle Ableitungen auftreten, spricht man von einer *partiellen Differentialgleichung*.

Wir behandeln im Folgenden einige wichtige Typen *explizit lösbarer* Differentialgleichungen.

### 7.1.1 Separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x)g(t) \tag{7.2}$$

für die gesuchte Funktion  $x = x(t)$  nennt man *separierbar*, da die Variablen *getrennt* werden können im Sinne des nun dargelegten Verfahrens.

(i) Sei zunächst  $f(x) \neq 0$ . Wir dividieren durch  $f(x)$  und erhalten

$$\frac{\dot{x}}{f(x)} = g(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} = g(t).$$

Wir führen in der zweiten Gleichung eine unbestimmte Integration durch und erhalten

$$\int \frac{\dot{x}(t) dt}{f(x(t))} = \int g(t) dt.$$

Nun machen wir die Substitution

$$x = x(t), \quad dx = \dot{x}(t) dt$$

und erhalten

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t) dt.$$

Ausführen der Integration liefert uns eine Stammfunktion  $H(x)$  von  $1/f(x)$  (links) und eine Stammfunktion  $G(t)$  von  $g(t)$  (rechts). Damit ist  $H(x) = G(t) + c$  mit einer Integrationskonstanten  $c$ . Wir lösen die Gleichung nach  $x$  auf und erhalten die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung (7.2) zu

$$x = H^{-1}(G(t) + c).$$

Die Konstante  $c$  kann nunmehr aus einer Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  bestimmt werden.

(ii) Falls  $f(x_0) = 0$  ist für einen Wert  $x_0$ , so erhalten wir eine weitere Lösung

$$x(t) \equiv x_0,$$

also eine Konstante. Dass diese die Gleichung (7.2) löst, sieht man durch Einsetzen: beide Seiten der Gleichung sind gleich Null.

**Merkregel:** Wir fassen das Verfahren bündig zusammen und gehen in vier Schritten vor:

1. Gleichung anschreiben:  $\frac{dx}{dt} = f(x)g(t)$ .
2. Variablen trennen:  $\frac{dx}{f(x)} = g(t) dt$ .
3. Unbestimmt integrieren:  $\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t) dt$ , bzw.  $H(x) = G(t) + c$ .
4. Auflösen nach  $x$  und Bestimmen der Konstanten aus der Anfangsbedingung.

**Beispiel 7.3** Wir lösen das Anfangswertproblem  $\dot{x} = tx^2$ ,  $x(0) = x_0$ .

Schritt 1:  $\frac{dx}{dt} = tx^2$ .

Schritt 2:  $\frac{dx}{x^2} = t dt$ .

Schritt 3:  $\int \frac{dx}{x^2} = \int t dt, \quad -\frac{1}{x} = \frac{1}{2}t^2 + c$ .

Schritt 4:  $x = \frac{-1}{\frac{1}{2}t^2 + c}$ .



Die Konstante  $c$  bestimmt man in diesem Fall am besten durch Einsetzen von  $t = 0$  in der zweiten Gleichung von Schritt 3:

$$-\frac{1}{x_0} = c$$

und damit

$$x(t) = \frac{-1}{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{x_0}} = \frac{2x_0}{2 - x_0 t^2}.$$

Diese Formel beinhaltet nun auch den bei der Rechnung zunächst ausgeschlossenen Fall  $x_0 = 0$  mit der konstanten Lösung  $x(t) \equiv 0$ .

Man sieht im Beispiel  $x_0 > 0$ , dass die Lösung nicht für alle Zeiten  $t \geq 0$  existiert, sondern bei  $\pm\sqrt{2/x_0}$  gegen Unendlich strebt. Für  $x_0 \leq 0$  existiert die Lösung für alle Zeiten  $t \geq 0$  (Abbildung 7.1).

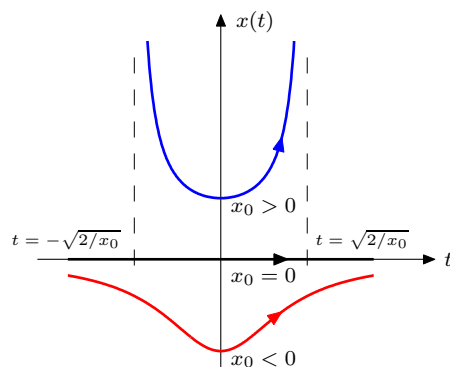


Abbildung 7.1: Lösungskurven für Beispiel 7.3.

**Beispiel 7.4** Wir lösen das Anfangswertproblem  $\dot{x} = kx$ ,  $x(t_0) = x_0$  mit einer Konstanten  $k \in \mathbb{R}$ .

Schritt 1:  $\frac{dx}{dt} = kx.$

Schritt 2:  $\frac{dx}{x} = k dt.$

Schritt 3:  $\int \frac{dx}{x} = \int k dt, \quad \log |x| = kt + c, \quad |x| = e^{kt} e^c.$

Schritt 4: Da  $x = \pm|x|$  und  $e^c > 0$  ist, argumentieren wir nun wie folgt. Wir führen eine neue Konstante  $C$  ein, die beliebiges Vorzeichen haben darf und schreiben die allgemeine Lösung als

$$x(t) = Ce^{kt}.$$

Darin sind alle Fälle enthalten  $x = |x| > 0$ ,  $x = -|x| < 0$  und  $x = 0$ .

Die Konstante  $C$  bestimmen wir aus dem Anfangswert  $x_0 = Ce^{kt_0}$ , also  $C = x_0 e^{-kt_0}$ . Wir können die Lösung der Anfangswertaufgabe in folgender Form schreiben:

$$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}.$$

**Beispiel 7.5** (Berechnung der Kettenlinie) Wir lösen die Differentialgleichung aus Beispiel 7.2

$$z''(x) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + (z'(x))^2}.$$

Zunächst führen wir die abhängige Variable  $y(x) = z'(x)$  ein und erhalten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + y^2}.$$

Diese lösen wir mittels Trennung der Variablen.

$$\text{Schritt 1: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + y^2}.$$

$$\text{Schritt 2: } \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{1}{\alpha} dx.$$

$$\text{Schritt 3: } \int \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \int \frac{dx}{\alpha}.$$

Wir erinnern uns nun an die Formel für die Ableitung des Areasinus hyperbolicus, nämlich  $(\operatorname{arsinh} x)' = 1/\sqrt{1 + x^2}$ . Wir erhalten somit für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\operatorname{arsinh} y = \frac{x}{\alpha} + c, \quad y = \sinh \left( \frac{x}{\alpha} + c \right).$$

Wegen  $z' = y$  erhalten wir die Gleichung der Kettenlinie durch nochmaliges Integrieren:

$$z(x) = \int \sinh \left( \frac{x}{\alpha} + c \right) dx + d = \alpha \cosh \left( \frac{x}{\alpha} + c \right) + d.$$

Schritt 4: Wir haben noch die beiden Integrationskonstanten  $c, d$  zu bestimmen. Legen wir das Koordinatensystem so, dass die Kettenlinie im Ursprung  $x = 0$  eine horizontale Tangente und Höhe  $\alpha$  besitzt, so erhalten wir die Bedingungen  $z(0) = \alpha$ ,  $z'(0) = y(0) = 0$ . Daraus ergibt sich  $c = 0$  und  $d = 0$  und wir erhalten die Lösung in der Form

$$z(x) = \alpha \cosh \left( \frac{x}{\alpha} \right).$$

Die Größe  $\alpha = X_0/q_0$  wird als *Seilparameter* bezeichnet.

### 7.1.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* ist eine Gleichung vom Typ

$$(L) \quad \dot{x}(t) + ax(t) = p(t).$$

Dabei heißt  $a$  der *Koeffizient* – den wir *konstant*<sup>1</sup> nehmen; die rechte Seite  $p(t)$  heißt die *Inhomogenität* der Gleichung. Die Gleichung wird als linear bezeichnet, da  $\dot{x}$  und  $x$  nur zur ersten Potenz und als Linearkombination vorkommen. Die Linearität hat folgende wichtige Konsequenz.

---

<sup>1</sup>Den allgemeinen Fall, in dem  $a$  auch von  $t$  abhängt, behandeln wir hier nicht.

**Satz 7.6** (Superpositionsprinzip) Falls  $x$  und  $y$  Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit möglicherweise verschiedenen Inhomogenitäten sind:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) + ax(t) &= p(t), \\ \dot{y}(t) + ay(t) &= q(t),\end{aligned}$$

dann löst die Linearkombination

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

die lineare Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) + az(t) = \alpha p(t) + \beta q(t).$$

Der Beweis des Satzes ergibt sich durch Einsetzen unter Verwendung der Linearität der Ableitung und der Gleichung.

Die Gleichung

$$(H) \quad \dot{x}(t) + ax(t) = 0$$

heißt zugehörige *homogene* Gleichung. Das Superpositionsprinzip hat zur Folge, dass sich die *allgemeine Lösung* der inhomogenen Gleichung (L) schreiben lässt als Summe

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

wobei  $x_h(t)$  die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (H) ist und  $x_p(t)$  eine einzelne (*partikuläre*) Lösung der inhomogenen Gleichung (L) ist. Diese Tatsache überprüft man leicht durch die Rechnung

$$\begin{aligned}\dot{x} + ax &= (x_h + x_p)' + a(x_h + x_p) \\ &= \dot{x}_h + ax_h + \dot{x}_p + ax_p = 0 + p = p.\end{aligned}$$

Wir erhalten daraus folgendes Lösungsverfahren:

Schritt 1: Man ermittle die allgemeine Lösung  $x_h(t)$  der homogenen Gleichung  $\dot{x}_h + ax_h = 0$ . Nach Beispiel 7.4 gilt

$$x_h(t) = Ce^{-at}$$

mit einer beliebigen Konstanten  $C$ .

Schritt 2: Man ermittle eine partikuläre Lösung  $x_p(t)$  der inhomogenen Gleichung (L). Dazu dient das Verfahren der *Variation der Konstanten*. Wir machen einen Ansatz

$$x_p(t) = C(t)e^{-at},$$

ersetzen also die Konstante  $C$  durch eine zu bestimmende Funktion  $C(t)$ . Einsetzen in die Gleichung (L) ergibt

$$\dot{C}(t)e^{-at} - aC(t)e^{-at} + aC(t)e^{-at} = p(t)$$

und daraus

$$\dot{C}(t) = p(t)e^{at}, \quad C(t) = \int p(t)e^{at} dt.$$

Nach dem zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung können wir zum Beispiel

$$\int_{t_0}^t p(\tau)e^{a\tau} d\tau$$

wählen. Insgesamt ergibt sich

$$x_p(t) = e^{-at} \int_{t_0}^t p(\tau)e^{a\tau} d\tau = \int_{t_0}^t p(\tau)e^{-a(t-\tau)} d\tau.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (L) ist nach dem Superpositionsprinzip

$$x(t) = Ce^{-at} + \int_{t_0}^t p(\tau)e^{-a(t-\tau)} d\tau.$$

mit einer beliebigen Konstanten  $C$ .

Schritt 3: Bestimmung der Konstanten  $C$  aus dem Anfangswert  $x(t_0) = x_0$ . Es ergibt sich  $C = x_0e^{at_0}$ .

**Beispiel 7.7** Wir lösen die Anfangswertaufgabe  $\dot{x}(t) + x(t) = t$ ,  $x(0) = 3$ . Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist klarerweise

$$x_h(t) = Ce^{-t}.$$

Wir machen den Ansatz

$$x_p(t) = C(t)e^{-t}$$

und setzen diesen in der Gleichung  $\dot{x}_p(t) + x_p(t) = t$  ein, was zu

$$\dot{C}(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = t$$

und damit zu

$$\dot{C}(t)e^{-t} = t, \quad \dot{C}(t) = te^t$$

führt. Daraus erhalten wir

$$C(t) = \int te^t dt = (t-1)e^t$$

und schließlich

$$x_p(t) = t-1, \quad x(t) = Ce^{-t} + t-1.$$

Einsetzen des Anfangswerts ergibt  $3 = C - 1$ , also  $C = 4$ . Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist

$$x(t) = 4e^{-t} + t - 1.$$

## 7.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Der lineare Einmassenschwinger ist ein wichtiges Grundmodell in der Mechanik. Er wird durch die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = p(t) \quad (7.3)$$

beschrieben. Die linearisierte Form der Gleichung für ebene Pendelschwingungen ist ebenfalls von diesem Typ. Es handelt sich dabei um dynamische (zeitabhängige) Probleme, bei denen Anfangswerte zu einem Anfangszeitpunkt  $t = t_0$  vorzuschreiben sind. Wir werden zunächst diesen Typus allgemein behandeln und dann auf die beiden Anwendungen eingehen.

In einem kurzen Abschnitt werden wir dann auf statische Probleme eingehen, die auf Differentialgleichungen vierter Ordnung führen. Anstelle der Anfangswerte sind Randwerte vorzugeben.

### 7.2.1 Die allgemeine lineare Gleichung zweiter Ordnung

Die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten  $a, b$ ) ist von der Form

$$(L) \quad \ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = p(t).$$

Wie im Fall von Gleichungen erster Ordnung ist die allgemeine Lösung von (L) von der Form

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

wobei  $x_p(t)$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (L) ist und  $x_h(t)$  die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$(H) \quad \ddot{x}_h(t) + a\dot{x}_h(t) + bx_h(t) = 0.$$

**Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.** Wie im vorigen Abschnitt ermitteln wir als erstes die allgemeine Lösung der Gleichung (H). Die Erkenntnisse von Abschnitt 7.1.2 legen nahe, einen Exponentialansatz

$$x_h(t) = e^{\lambda t}$$

mit unbekanntem Exponenten  $\lambda$  zu versuchen. Einsetzen in (H) ergibt

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0.$$

Da  $e^{\lambda t}$  stets ungleich Null ist, können wir durchdividieren und erhalten die so genannte *charakteristische Gleichung* für den Exponenten:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Die charakteristische Gleichung besitzt die Wurzeln

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Die weitere Vorgangsweise hängt vom Vorzeichen der Diskriminante  $\frac{a^2}{4} - b$  ab.

**Fall 1.**  $\frac{a^2}{4} - b > 0$ . Die Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind reell und verschieden. Wir erhalten zwei unabhängige Lösungen  $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ ,  $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ . Nach dem Superpositionsprinzip ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

mit beliebigen Konstanten  $C_1, C_2$ . Durch Vorgabe von Anfangswerten können die Konstanten festgelegt werden.

**Beispiel 7.8** Wir lösen die homogene Aufgabe  $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$ . Die charakteristische Gleichung ist  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$  mit den Wurzeln

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -1, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -2.$$

Die allgemeine Lösung ist demnach

$$x_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Geben wir zum Beispiel die Anfangswerte  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 1$  vor, so ergibt sich das Gleichungssystem für die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$ :

$$\begin{array}{rcl} C_1 & + & C_2 = 1 \\ -C_1 & - & 2C_2 = 1 \end{array}$$

mit der Lösung  $C_1 = 3$ ,  $C_2 = -2$ . Die Lösung  $x(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$  des Anfangswertproblems entsteht durch Überlagerung zweier Exponentialfunktionen, wie in Abbildung 7.2 dargestellt.

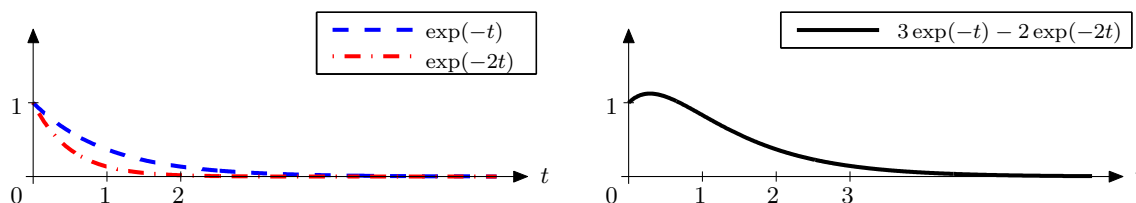


Abbildung 7.2: Unabhängige Lösungen für Beispiel 7.8 und Überlagerung.

**Fall 2.**  $\frac{a^2}{4} - b = 0$ . Dann ist die charakteristische Gleichung von der Form

$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{a^2}{4} = 0$$

und besitzt nur eine, allerdings zweifache, Nullstelle  $\lambda = -\frac{a}{2}$ . Der Exponentialansatz liefert also nur eine einzige Lösung  $x_1(t) = e^{-at/2}$ . Wir zeigen, dass  $x_2(t) = t e^{-at/2}$  eine weitere Lösung darstellt. Mit Hilfe der Produktregel erhalten wir nämlich

$$\dot{x}_2(t) = \left(1 - \frac{a}{2}t\right) e^{-at/2}, \quad \ddot{x}_2(t) = \left(-a + \frac{a^2}{4}t\right) e^{-at/2}$$

Einsetzen in die Gleichung zeigt, dass tatsächlich

$$\ddot{x}_2(t) + a\dot{x}_2(t) + \frac{a^2}{4}x_2(t) = 0$$

ist. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung im Fall 2 ist demnach

$$x_h(t) = C_1 e^{-at/2} + C_2 t e^{-at/2}.$$

**Fall 3.**  $\frac{a^2}{4} - b < 0$ . Dann ist  $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$  imaginär. Wir schreiben die beiden konjugiert komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung in der Form

$$\lambda_1 = \Lambda + i\Omega, \quad \lambda_2 = \Lambda - i\Omega$$

mit

$$\Lambda = -\frac{a}{2}, \quad \Omega = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} \quad (7.4)$$

und erhalten als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung die komplexen Exponentialfunktionen

$$x_h(t) = C_1 e^{(\Lambda+i\Omega)t} + C_2 e^{(\Lambda-i\Omega)t}. \quad (7.5)$$

Um daraus eine reelle Darstellung zu gewinnen, erinnern wir an die Euler'schen Formeln

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \end{aligned}$$

Wir machen uns nun zunutze, dass im Superpositionsprinzip komplexe Linearkombinationen durchaus zulässig sind. Durch Wahl von

$$C_1 = \frac{1}{2}D_1, \quad C_2 = \frac{1}{2}D_1$$

erhalten wir aus Gleichung (7.5) die Kombination

$$x_1(t) = D_1 e^{\Lambda t} \frac{1}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) = D_1 e^{\Lambda t} \cos \Omega t;$$

durch Wahl von

$$C_1 = \frac{1}{2i}D_2, \quad C_2 = -\frac{1}{2i}D_2$$

erhalten wir

$$x_2(t) = D_2 e^{\Lambda t} \frac{1}{2i} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) = D_2 e^{\Lambda t} \sin \Omega t.$$

Insgesamt ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung in reeller Form zu

$$x_h(t) = e^{\Lambda t} (D_1 \cos \Omega t + D_2 \sin \Omega t), \quad (7.6)$$

wobei  $\Lambda$  und  $\Omega$  durch Formel (7.4) gegeben sind.

**Beispiel 7.9** Wir lösen die homogene Aufgabe  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 26x(t) = 0$ . Die charakteristische Gleichung ist  $\lambda^2 + 2\lambda + 26 = 0$  mit den Wurzeln

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{-25} = -1 + 5i, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt{-25} = -1 - 5i.$$

In komplexer Darstellung ist die allgemeine Lösung

$$x_h(t) = C_1 e^{(-1+5i)t} + C_2 e^{(-1-5i)t},$$

in reeller Darstellung ergibt sich

$$x_h(t) = e^{-t} (D_1 \cos 5t + D_2 \sin 5t).$$

Zur Lösung eines Anfangswertproblems leiten wir einmal ab:

$$\dot{x}_h(t) = -e^{-t} (D_1 \cos 5t + D_2 \sin 5t) + e^{-t} (-5D_1 \sin 5t + 5D_2 \cos 5t).$$

Beispielsweise erhalten wir für die Anfangswerte  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} D_1 &= 1, \\ -D_1 + 5D_2 &= 0, \end{aligned}$$

also  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 1/5$ . Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$x(t) = e^{-t} \left( \cos 5t + \frac{1}{5} \sin 5t \right).$$

Die Lösung ist eine Linearkombination von zwei Schwingungen mit abklingendem Betrag, welcher durch die Hüllkurven  $\pm \sqrt{\frac{26}{25}} e^{-t}$  dargestellt werden kann (vgl. Abbildung 7.3).

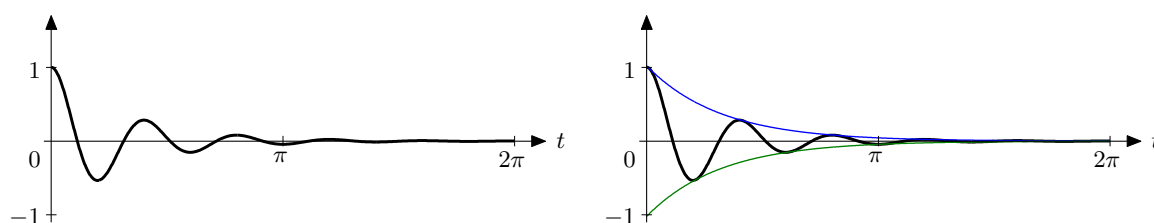


Abbildung 7.3: Lösungskurve für Beispiel 7.9 ohne und mit Hüllkurven.

**Beispiel 7.10** (Die harmonische Schwingung) Ist in der Gleichung des Einmassenschwingers (7.3) der Reibungskoeffizient  $r = 0$ , so erhält man die Gleichung der harmonischen Schwingung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

mit  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Diese Gleichung wollen wir etwas näher analysieren. Ihre komplexe Lösung ist rein imaginär, in reeller Form erhält man eine Superposition von Sinus- und Cosinusfunktionen:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t.$$

Man bezeichnet  $\omega$  als die *Kreisfrequenz* der Schwingung, gemessen in Radiant/Sekunde, während  $f = \omega/2\pi$  die *Frequenz* der Schwingung ist, gemessen in Hertz. Die *Periode* der Schwingung ist  $\tau = 1/f = 2\pi/\omega$ , Maßeinheit Sekunden.



Wir wollen diese Lösung in sogenannter *harmonischer Darstellung*

$$x(t) = A \cos(\omega t - \theta)$$

mit der *Amplitude*  $A$  und dem *Phasenwinkel*  $\theta$  schreiben. Wir bestimmen zunächst die Amplitude durch

$$A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}.$$

Dann ist

$$x(t) = A \left( \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}} \cos \omega t + \frac{D_2}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}} \sin \omega t \right).$$

Die Summe der Koeffizienten im Klammerausdruck ist nunmehr gleich Eins; wir können die Koeffizienten eindeutig als Sinus und Cosinus eines Winkels  $\theta$  zwischen 0 und  $2\pi$  schreiben:

$$\cos \theta = \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, \quad \sin \theta = \frac{D_2}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}.$$

Damit gilt

$$x(t) = A (\cos \theta \cos \omega t + \sin \theta \sin \omega t) = A \cos(\omega t - \theta);$$

dies ist die gesuchte harmonische Darstellung. Die Amplitude ist die maximale Auslenkung aus der Ruhelage. Um den Phasenwinkel zu interpretieren, schreiben wir

$$A \cos(\omega t - \theta) = A \cos \omega \left( t - \frac{\theta}{\omega} \right)$$

und sehen, dass der Graph von  $x(t)$  um den Wert  $\theta/\omega$  – der *Phasenverschiebung* – im Vergleich zum Graphen von  $\cos \omega t$  nach rechts verschoben ist (Abbildung 7.4).

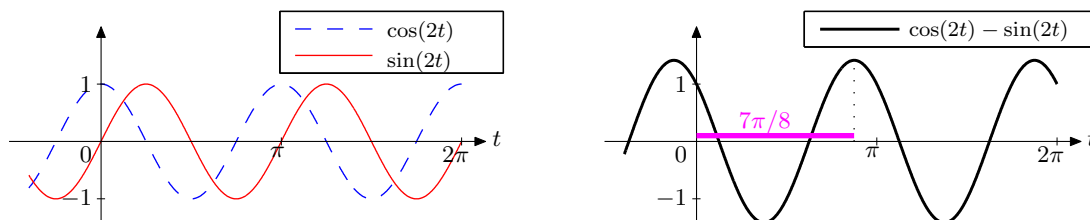


Abbildung 7.4: Überlagerung einer Sinus- und Cosinuskurve zu einer harmonischen Schwingung mit Amplitude  $A = \sqrt{2}$  und Phasenverschiebung  $\theta/\omega = 7\pi/8$ .

Als konkretes Beispiel wollen wir das Anfangswertproblem  $\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = -2$  lösen. Wir erhalten  $x(t) = \cos 2t - \sin 2t$ , somit

$$A = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

mit der eindeutigen Lösung  $\theta = 7\pi/4$ . Mithin gilt

$$x(t) = \sqrt{2} \cos(2t - 7\pi/4).$$

Die Amplitude dieser harmonischen Schwingung ist  $A = \sqrt{2}$ , ihre Kreisfrequenz ist  $\omega = 2$ , der Phasenwinkel ist  $\theta = 7\pi/4$  und die Phasenverschiebung ist  $\theta/\omega = 7\pi/8$ .

Selbstverständlich kann auch die Lösung (7.6) der allgemeinen Schwingungsgleichung in der Form

$$x_h(t) = A e^{\Lambda t} \cos(\Omega t - \theta)$$

geschrieben werden.

**Gewinnung einer partikulären Lösung der Gleichung (L).** Unser nächstes Ziel ist es, eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = p(t) \quad (7.7)$$

zu ermitteln. Hierzu gibt es mehrere Methoden. Eine allgemein anwendbare Methode besteht in der *Variation der Konstanten*. Wir machen den Ansatz

$$x_p(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$$

wobei  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  die unabhängigen Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung sind. Einsetzen in der Differentialgleichung führt auf ein lineares Gleichungssystem für  $\dot{C}_1(t)$  und  $\dot{C}_2(t)$  und damit zur Errechnung der Koeffizientenfunktionen  $C_1(t)$  und  $C_2(t)$ .

Etwas genauer ausgeführt, verläuft das Verfahren wie folgt. Einmaliges Ableiten von  $x_p(t)$  ergibt

$$\dot{x}_p(t) = C_1(t)\dot{x}_1(t) + C_2(t)\dot{x}_2(t) + \dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t).$$

An dieser Stelle verlangen wir als erste Beziehung für  $\dot{C}_1(t)$  und  $\dot{C}_2(t)$ :

$$\dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t) = 0. \quad (7.8)$$

Nochmaliges Ableiten ergibt unter Verwendung von (7.8):

$$\ddot{x}_p(t) = C_1(t)\ddot{x}_1(t) + C_2(t)\ddot{x}_2(t) + \dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t).$$

Nun setzen wir  $\ddot{x}_p(t)$ ,  $\dot{x}_p(t)$  und  $x_p(t)$  in die inhomogene Gleichung (7.7) ein und berücksichtigen, dass  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen der homogenen Gleichung sind. Somit verbleibt

$$\dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t) = p(t). \quad (7.9)$$

Die Gleichungen (7.8) und (7.9) bilden ein lineares Gleichungssystem für  $\dot{C}_1(t)$  und  $\dot{C}_2(t)$ . Nach Auflösung dieses Systems und Integration erhalten wir die gesuchten Koeffizienten  $C_1(t)$  und  $C_2(t)$  und damit eine partikuläre Lösung.

Ebenso sei nur erwähnt, dass im Fall einer Inhomogenität der Form  $p(t) = q(t)e^{\alpha t}$  mit einem Polynom  $q(t)$  ein Ansatz der Form  $x_p(t) = r(t)e^{\alpha t}$  mit einem geeigneten Polynom  $r(t)$  zum Ziel führt.

Ausführlich behandeln wir den in der Technik wichtigen Fall einer *erzwungenen Schwingung*

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = p_0 \cos \nu t, \quad (7.10)$$

bei der die Inhomogenität aus einer Erregerschwingung der Amplitude  $p_0$  und der Kreisfrequenz  $\nu$  besteht. Hier eignet sich der Ansatz

$$x_p(t) = B \cos(\nu t - \theta)$$

mit unbekannter Amplitude  $B$  und Phasenwinkel  $\theta$ . Wir leiten die Ansatzfunktion ab und erhalten

$$\begin{aligned} x_p(t) &= B \cos(\nu t - \theta) = B \cos \nu t \cos \theta + B \sin \nu t \sin \theta \\ \dot{x}_p(t) &= -B\nu \sin(\nu t - \theta) = -B\nu \sin \nu t \cos \theta + B\nu \cos \nu t \sin \theta \\ \ddot{x}_p(t) &= -B\nu^2 \cos(\nu t - \theta) = -B\nu^2 \cos \nu t \cos \theta - B\nu^2 \sin \nu t \sin \theta \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (7.10) erhalten wir auf der linken Seite eine Linearkombination der Funktionen  $\sin \nu t$  und  $\cos \nu t$ , während rechts  $0 \cdot \sin \nu t + p_0 \cdot \cos \nu t$  steht. Durch Koeffizientenvergleich gelangen wir zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -B\nu^2 \sin \theta - aB\nu \cos \theta + bB \sin \theta &= 0 \\ -B\nu^2 \cos \theta + aB\nu \sin \theta + bB \cos \theta &= p_0 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann die Amplitude  $B$  und der Phasenwinkel  $\theta$  berechnet werden.

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $-\cos \theta$  und die zweite mit  $\sin \theta$ , so erhalten wir nach Addition der beiden Zeilen

$$aB\nu = p_0 \sin \theta \quad \text{bzw.} \quad B = \frac{p_0 \sin \theta}{a\nu}.$$

Multiplikation der ersten Gleichung im Gleichungssystem mit  $\sin \theta$  und der zweiten mit  $\cos \theta$  und Addition ergibt

$$B(b - \nu^2) = p_0 \cos \theta.$$

Setzen wir den gewonnen Ausdruck für  $B$  ein und quadrieren wir, so ergibt sich

$$(b - \nu^2)^2 \sin^2 \theta = (a\nu)^2 \cos^2 \theta$$

und über  $(b - \nu^2)^2 \sin^2 \theta = (a\nu)^2 (1 - \sin^2 \theta)$  dann

$$\sin^2 \theta = \frac{(a\nu)^2}{(a\nu)^2 + (b - \nu^2)^2}.$$

Wählen wir das Vorzeichen der Amplitude  $B$  im Einklang mit jenem des Faktors  $p_0$ , so ergibt sich

$$B = \frac{p_0}{\sqrt{(a\nu)^2 + (b - \nu^2)^2}};$$

der Phasenwinkel ist dann im Intervall  $[0, 2\pi)$  eindeutig durch die Gleichungen

$$\sin \theta = \frac{a\nu}{\sqrt{(a\nu)^2 + (b - \nu^2)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{b - \nu^2}{\sqrt{(a\nu)^2 + (b - \nu^2)^2}}$$

festgelegt. Im Fall des Einmassenschwingers ist  $a = r/m \geq 0$  und der Phasenwinkel zwischen 0 und  $\pi$ .

In konkreten Beispielen ist es oft rechnerisch einfacher, einen Ansatz der Form

$$x_p(t) = c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t$$

zu machen und des Ergebnis erst am Schluss auf die harmonische Darstellung  $x_p(t) = B \cos(\nu t - \theta)$  umzurechnen.

**Beispiel 7.11** In Fortsetzung von Beispiel 7.9 ermitteln wir eine partikuläre Lösung der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 26x(t) = 25 \cos 2t.$$

Der Ansatz  $x_p(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$  ergibt

$$\begin{aligned} x_p(t) &= c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \\ \dot{x}_p(t) &= -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t \\ \ddot{x}_p(t) &= -4c_1 \cos 2t - 4c_2 \sin 2t \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$(22c_1 + 4c_2) \cos 2t = 25 \cos 2t, \quad (-4c_1 + 22c_2) \sin 2t = 0$$

und damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 22c_1 + 4c_2 &= 25, \\ -4c_1 + 22c_2 &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung  $c_1 = 11/10$ ,  $c_2 = 1/5$ . Um die daraus erhaltene partikuläre Lösung

$$x_p(t) = \frac{11}{10} \cos 2t + \frac{1}{5} \sin 2t$$

in der Form

$$x_p(t) = B \cos(2t - \theta) = B(\cos 2t \cos \theta + \sin 2t \sin \theta)$$

zu schreiben, setzen wir

$$B = \sqrt{\left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.1180$$

und

$$\cos \theta = \frac{11}{5\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

Der Phasenwinkel  $\theta$  liegt demnach im ersten Quadranten und lässt sich zum Beispiel durch

$$\theta = \arccos \frac{11}{5\sqrt{5}} = \arcsin \frac{2}{5\sqrt{5}} \approx 0.1799$$

angeben. Insgesamt erhalten wir für die Lösung

$$x_p(t) \approx 1.1180 \cos(2t - 0.1799).$$

**Bemerkung 7.12** Das Verfahren funktioniert nicht im Fall  $a = 0$ ,  $b = \nu^2$ . In diesem Fall lautet die Differentialgleichung allerdings

$$\ddot{x}(t) + \nu^2 x(t) = p_0 \cos \nu t,$$

stellt also eine ungedämpfte Schwingung mit Erregung unter Eigenfrequenz dar. Hier eignet sich der Ansatz

$$x_p(t) = Bt \cos(\nu t - \theta),$$

was wie oben auf

$$B = \frac{1}{2\nu}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

führt. Die partikuläre Lösung im Sonderfall ist

$$x_p(t) = \frac{p_0 t}{2\nu} \cos(\nu t - \pi/2) = \frac{p_0 t}{2\nu} \sin \nu t.$$

**Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (L).** Man erhält sie durch Superposition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und der partikulären Lösung in der Form

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + x_p(t),$$

wobei die unabhängigen Lösungen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  der homogenen Gleichung sich nach den drei Fällen oben richten. Die Konstanten  $C_1$ ,  $C_2$  lassen sich eindeutig aus den Anfangswerten  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$  ermitteln.

Speziell im Falle einer erzwungenen Schwingung mit Reibung ergibt sich die Lösung in der Form

$$x(t) = e^{\Lambda t} (D_1 \cos \Omega t + D_2 \sin \Omega t) + B \cos(\nu t - \theta)$$

mit  $\Lambda = -a/2 < 0$ . Der erste Teil beschreibt die Eigenschwingungen und geht mit  $t \rightarrow \infty$  exponentiell gegen Null, ist also nach dem *Einschwingvorgang* nicht mehr bemerkbar. Auf Dauer bleibt nur die *stationäre Lösung*  $x_p(t) = B \cos(\nu t - \theta)$ , die mit der Erregerfrequenz phasenverschoben schwingt.

**Beispiel 7.13** Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 26x(t) = 25 \cos 2t$$

aus Beispiel 7.11 lautet

$$x(t) = e^{-t} (D_1 \cos 5t + D_2 \sin 5t) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(2t - \theta)$$

mit  $\theta = \arccos \frac{11}{5\sqrt{5}} = \arcsin \frac{2}{5\sqrt{5}} \approx 0.1799$ .

Verlangen wir beispielsweise die Anfangsbedingungen  $x(0) = 2$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , so ergibt sich

$$D_1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos(-\arccos \frac{11}{5\sqrt{5}}) = 2, \quad \text{d.h.} \quad D_1 = \frac{9}{10}$$

und nach Ableiten des Lösungsansatzes

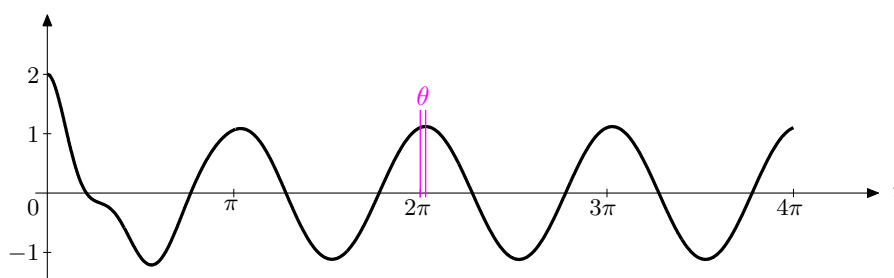
$$-D_1 + 5D_2 - \sqrt{5} \sin(-\arcsin \frac{2}{5\sqrt{5}}) = 0, \quad \text{d.h.} \quad D_2 = \frac{1}{10}.$$

Der Verlauf der Lösung ist in Abbildung 7.5 dargestellt.

## 7.2.2 Darstellung im Phasendiagramm

Die Darstellung der Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung im *Phasendiagramm* ist vor allem im nichtlinearen Fall von Interesse und wird im nächsten Abschnitt zur Geltung kommen. Zur Einführung dieser Sichtweise betrachten wir in diesem Abschnitt zunächst den linearen Fall der harmonischen Schwingung, beschrieben durch die Gleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{7.11}$$



Abbildungung 7.5: Lösungskurve für Beispiel 7.13: Einschwingvorgang und stationäre Lösung.

mit der Kreisfrequenz  $\omega$ . Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist bekanntlich

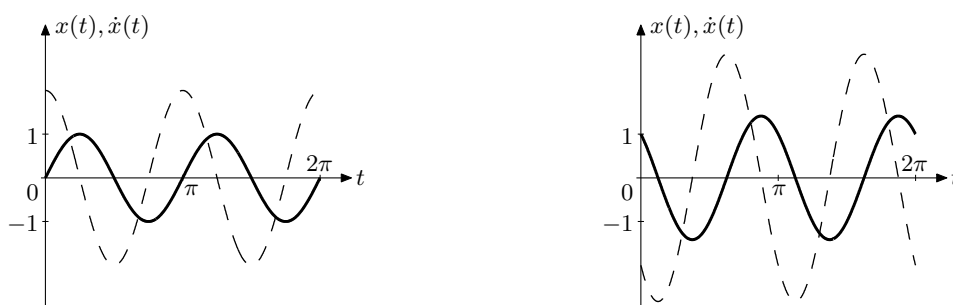
$$x(t) = D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t.$$

Bisher haben wir die Lösung als Funktion der Zeit visualisiert, also in der  $(t, x)$ -Ebene. In gleicher Weise kann man auch die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  in Abhängigkeit von der Zeit darstellen. Der Verlauf der Auslenkung und der Geschwindigkeit ist für den Fall  $\omega = 2$  und die beiden Lösungen

$$x(t) = \sin 2t, \quad \text{mit} \quad \dot{x}(t) = 2 \cos 2t \quad (7.12)$$

$$x(t) = \cos 2t - \sin 2t, \quad \text{mit} \quad \dot{x}(t) = -2 \sin 2t - 2 \cos 2t \quad (7.13)$$

aus Abbildung 7.6 ersichtlich.

Abbildungung 7.6: Auslenkung und Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit für die Lösungen  $x(t) = \sin 2t$  (links) bzw.  $x(t) = \cos 2t - \sin 2t$  (rechts).

Diese Diagramme rücken vor allem den Verlauf einzelner Lösungen in den Vordergrund. Will man das qualitative Verhalten der Lösungsgesamtheit veranschaulichen, so eignet sich eher die Darstellung in der  $(x, \dot{x})$ -Ebene, indem man also  $\dot{x}$  gegen  $x$  aufträgt. Diese Darstellung nennt man das *Phasendiagramm*. Zum Beispiel stellt das linke Bild in Abb. 7.7 die beiden Lösungen (7.12) und (7.13) dar.

Dass die Lösungskurven im Phasendiagramm tatsächlich Ellipsen sind, sieht man folgendermaßen. Leitet man den Ausdruck  $E(t) = \frac{1}{2}(\dot{x}(t)^2 + \omega^2 x(t)^2)$  nach  $t$  ab<sup>2</sup> und beachtet

<sup>2</sup>In der Mechanik wird gezeigt, dass  $E(t)$  die Gesamtenergie des Systems darstellt

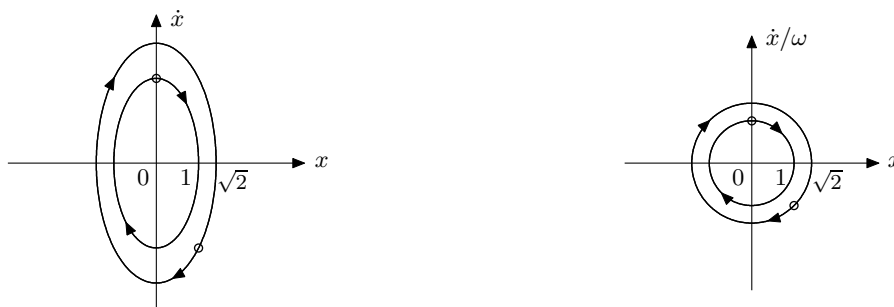


Abbildung 7.7: Lösungskurven im Phasenraum für die beiden Beispiele  $x(t) = \sin 2t$  und  $x(t) = \cos 2t - \sin 2t$  (links); dasselbe im skalierten Phasendiagramm (rechts).

die Gleichung (7.11), so erhält man

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \dot{x}(t)^2 + \omega^2 x(t)^2 \right) = \dot{x}(t) (\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)) = 0.$$

Der Ausdruck  $E(t)$  muss somit konstant sein, etwa gleich seinem Wert  $C = E(0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Man erkennt, dass die Lösungskurven die Ellipsengleichung

$$\frac{\dot{x}^2}{2C} + \frac{\omega^2 x^2}{2C} = 1$$

erfüllen. Die kleinen Kreise in Abbildung 7.7 bezeichnen den Startwert zum Zeitpunkt  $t = 0$ , die Pfeile die Umlaufrichtung. Die Geschlossenheit der Ellipsen deutet an, dass die Lösungen periodisch sind. Häufig skaliert man das Phasendiagramm, indem man  $\dot{x}/\omega$  gegen  $x$  aufträgt. Das periodische Verhalten entspricht dann kreisförmigen Lösungskurven, siehe Abbildung 7.7, rechtes Bild.

### 7.2.3 Die Pendelgleichung

Als weiteres Beispiel betrachten wir das *mathematische Pendel*. Dabei schwingt ein Körper der Masse  $m$  an einem Faden der Länge  $l$  unter der Schwerkraft  $-mg$  um den Ursprung (siehe Abb. 7.8). Bezeichnet  $x(t)$  den Auslenkungswinkel (im Gegenuhrzeigersinn) aus der Ruhelage, so ist die Tangentialbeschleunigung des Körpers gleich  $l\ddot{x}(t)$ . Die Tangentialkomponente der Erdanziehungskraft ist  $-mg \sin x(t)$ . Nach dem Newton'schen Gesetz ist Kraft = Masse  $\times$  Beschleunigung, daher

$$-mg \sin x = ml\ddot{x}$$

oder

$$\ddot{x}(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t).$$

Wir setzen  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  und erhalten die übersichtliche Form

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 \sin x(t) = 0. \quad (7.14)$$

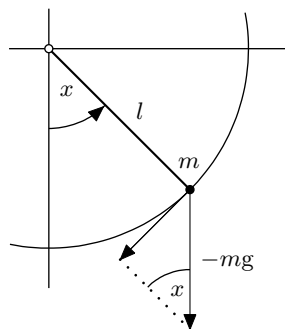


Abbildung 7.8: Herleitung der Pendelgleichung.

Die Linearisierung

$$\sin x = x + \mathcal{O}(x^3) \approx x$$

für kleine Auslenkungen  $x$  führt auf die Näherung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

also auf die Gleichung einer harmonischen Schwingung, deren Lösung bereits in Beispiel 7.10 behandelt wurde.

Wir wenden uns der Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (7.14) zu. Es ist ein Grundprinzip der *Lagrange'schen Mechanik*<sup>3</sup>, dass man Gleichungen des Typs (7.14) in einen Erhaltungssatz (für die Gesamtenergie) umwandeln kann: Multiplikation der Gleichung mit  $\dot{x}(t)$  führt auf

$$\dot{x}(t) \ddot{x}(t) + \omega^2 \dot{x}(t) \sin x(t) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (\dot{x}(t))^2 - \omega^2 \cos x(t) \right) = 0.$$

Das heißt aber, dass die Funktion im Klammerausdruck konstant sein muss:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega^2 \cos x = C;$$

die Konstante können wir aus Anfangswerten  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$  bestimmen:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega^2 \cos x = \frac{1}{2} \dot{x}_0^2 - \omega^2 \cos x_0,$$

oder aufgelöst

$$\dot{x}/\omega = \pm \sqrt{\dot{x}_0^2/\omega^2 - 2 \cos x_0 + 2 \cos x}. \quad (7.15)$$

Um uns ein Bild zu verschaffen, können wir die Lösungskurven im *Phasendiagramm* darstellen, indem wir  $\dot{x}/\omega$  gegen  $x$  auftragen (vgl. Abb. 7.9):

Zunächst erkennt man drei stationäre Lösungen (Gleichgewichtspunkte) der Gleichungen (7.14) und (7.15), nämlich

$$x = 0, \dot{x} = 0; \quad x = -\pi, \dot{x} = 0; \quad x = \pi, \dot{x} = 0.$$

---

<sup>3</sup>J.-L. Lagrange, 1736–1813.



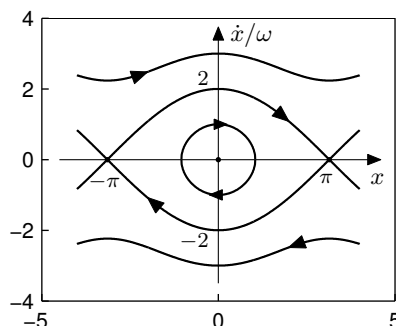


Abbildung 7.9: Mathematisches Pendel, Lösungskurven im Phasendiagramm.

Die Gleichgewichtspunkte  $(-\pi, 0)$  und  $(\pi, 0)$  sind durch eine obere und eine untere Grenzlosungskurve (Separatrix) verbunden. Die obere Grenzkurve erhält man zum Beispiel aus den Anfangswerten  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0/\omega = 2$ . Man kann zeigen, dass sich für  $t \rightarrow \infty$  die Lösung längs dieser Kurve dem Gleichgewichtspunkt  $(\pi, 0)$  nähert, für  $t \rightarrow -\infty$  dem Gleichgewichtspunkt  $(-\pi, 0)$ . Innerhalb der Grenzlosungskurven (etwa mit Anfangswerten  $x_0 = 0$ ,  $|\dot{x}_0/\omega| < 2$ ) liegen periodische Lösungen - ungebremste kleine Schwingungen. Die außerhalb liegenden Lösungen stellen ungebremste Schwingungen mit Überschlag des Pendels dar. Der Gleichgewichtspunkt  $(0, 0)$  ist stabil in dem Sinn, dass in der Nähe beginnende Lösungskurven sich mit wachsender Zeit nicht entfernen. Dies ist bei den Gleichgewichtspunkten  $(-\pi, 0)$  und  $(\pi, 0)$  nicht der Fall; es handelt sich um instabile Gleichgewichtspunkte. Wir merken an, dass Reibungseffekte in diesem Modell nicht berücksichtigt sind.

Das Phasendiagramm sagt nichts darüber aus, durch welche Funktion der Zeit die Lösung gegeben ist. Tatsächlich kann man die Lösung durch die *Jacobi'sche elliptische Funktion*<sup>4</sup>  $\text{sn}(v|k)$  ausdrücken. Diese höher transzendente Funktion ist mit Hilfe des *elliptischen Integrals*

$$v = F(u) = \int_0^u \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$$

durch

$$\text{sn}(v|k) = u = F^{-1}(v)$$

definiert; dabei heißt  $k$  der *Modul*,  $0 \leq k \leq 1$ , und  $\varphi = \arcsin u$  die *Amplitude* der Jacobi'schen elliptischen Funktion. Die Jacobi'sche elliptische Funktion ist periodisch mit Periode  $\tau = 4K$ , wobei

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}} \quad (7.16)$$

ist. Nach einer etwas aufwändigen Rechnung, die nicht Stoff der Vorlesung ist (siehe den Anhang unten), erhält man die Lösungen der Differentialgleichung (7.15) mit Hilfe der Jacobi'schen elliptischen Funktion. Zum Beispiel ergeben sich die periodischen Lösungen innerhalb der Separatrix zu

$$x(t) = 2 \arcsin(k \text{sn}(\omega t + K|k))$$

mit  $k = \sin \frac{x_0}{2}$ .

---

<sup>4</sup>C.G. Jacobi, 1804–1851.

**Anhang – explizite Lösung der Pendelgleichung.** Nur für hartgesottene Mathematikfans lösen wir die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t)/\omega = \sqrt{\dot{x}_0^2/\omega^2 - 2\cos x_0 + 2\cos x(t)}$$

mit Trennung der Variablen und bestimmter Integration von 0 bis  $t$ :

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{\sqrt{\dot{x}_0^2/\omega^2 - 2\cos x_0 + 2\cos x(\tau)}} = \int_0^t \omega d\tau.$$

Nach Substitution  $y = x(\tau)$  erhalten wir unter Benützung von  $x(0) = x_0$ ,  $x(t) = x$ :

$$\omega t = \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sqrt{\dot{x}_0^2/\omega^2 - 2\cos x_0 + 2\cos y}}.$$

Da wir in dieser Rechnung  $\dot{x}(t) > 0$  vorausgesetzt haben, stimmt die Formel, wenn  $t \geq 0$  und  $x(t) \geq x_0$  oder wenn  $t \leq 0$  und  $x(t) \leq x_0$  ist; andernfalls wäre das negative Vorzeichen in (7.15) zu nehmen. Wir führen nun den Modul

$$k = \sqrt{\sin^2 \frac{x_0}{2} + \frac{\dot{x}_0^2}{4\omega^2}}$$

ein und machen die Substitution

$$kz = \sin \frac{y}{2}.$$

Unter Anwendung der Formeln

$$\cos y = 1 - 2\sin^2 \frac{y}{2}, \quad \cos \frac{y}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{y}{2}}$$

erhalten wir

$$k dz = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{y}{2}} dy = \frac{1}{2} \sqrt{1 - k^2 z^2} dy, \quad dy = \frac{2k dz}{\sqrt{1 - k^2 z^2}}$$

und

$$\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} - 2\cos x_0 + 2\cos y = \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} - 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{x_0}{2}\right) + 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{y}{2}\right) = 4k^2(1 - z^2).$$

Eingesetzt im Integralausdruck für  $\omega t$  ergibt sich

$$\omega t = \int_{\frac{1}{k} \sin \frac{x_0}{2}}^{\frac{1}{k} \sin \frac{x}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - k^2 z^2}}.$$

Zur weiteren Berechnung ist es günstig,  $\dot{x}_0 = 0$  und  $0 < x_0 < \pi$  zu nehmen. Dies führt auf  $k = \sin \frac{x_0}{2}$  und laut Abbildung 7.9 auf  $x(t) \leq x_0$ , also

$$\omega t = \int_1^{\frac{1}{k} \sin \frac{x}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - k^2 z^2}} = \int_0^{\frac{1}{k} \sin \frac{x}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - k^2 z^2}} - \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - k^2 z^2}}$$

mit  $t \leq 0$ . Laut Formel (7.16) ist das letzte Integral gleich der Viertelperiode  $K$  und wir erhalten

$$\omega t + K = \int_0^{\frac{1}{k} \sin \frac{x}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - k^2 z^2}}.$$

Rufen wir uns die Definition der Jacobi'schen elliptischen Funktion in Erinnerung, so sehen wir:

$$\operatorname{sn}(\omega t + K|k) = \frac{1}{k} \sin \frac{x}{2}.$$

Das Endergebnis für die Lösungen  $x = x(t)$  der Pendelgleichung innerhalb der Separatrix ist, wie gewünscht,

$$x(t) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(\omega t + K|k))$$

mit  $k = \sin \frac{x_0}{2}$ . Auch die Lösungen außerhalb der Separatrix lassen sich durch geeignete Substitutionen auf Jacobi'sche elliptische Funktionen zurückführen.

### 7.2.4 Lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung

Im Gegensatz zu den in den vorigen im Abschnitten behandelten *Anfangswertproblemen* für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung betrachten wir nun *Randwertprobleme*, bei denen die Lösung auf einem Intervall der Länge  $\ell$  gesucht ist, also etwa auf dem Intervall  $[0, \ell]$ . Solche Aufgaben treten in der Kontinuumsmechanik und Festigkeitslehre auf. Dabei ist die unabhängige Variable eine Ortsvariable, für die wir  $x$  schreiben, und die gesuchte Funktion typischerweise eine Auslenkung oder Verschiebung, für die wir  $w(x)$  schreiben.

**Der Biegebalken.** Das einfachste Beispiel, das auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung führt, ist der Euler-Bernoulli-Balken<sup>5 6</sup>. Wir betrachten kleine Durchbiegungen eines linear-elastischen Balkens der Länge  $\ell$ . Wir können dies als eindimensionales Problem formulieren. Der Balken sei in den Punkten  $x = 0$  und  $x = \ell$  gelagert. Er werde mit einer Streckenlast  $q(x)$  (Kraft/Länge) belastet; die Durchbiegung wird mit  $w(x)$  bezeichnet (vgl. Abb. 7.10).

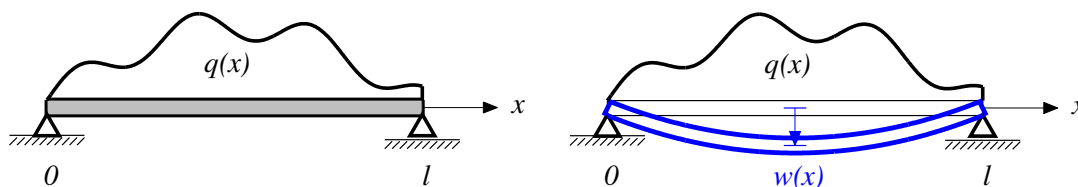


Abbildung 7.10: Gelenkig gelagerter Biegebalken unter Streckenlast.

Auf den Balken wirken die *Auflagerkräfte*  $Q_0, Q_\ell$  (dabei gilt  $Q_0 + Q_\ell = \int_0^\ell q(x) dx$ ) sowie die *Querkraft*  $Q(x)$ . Die Querkraft erhält man zum Beispiel als Summe aller Kräfte, die auf das Teilstück links des Schnitts  $x$  wirken (Auflagerkräfte positiv, Belastungen negativ), zu

$$Q(x) = Q_0 - \int_0^x q(z) dz.$$

Das *Biegemoment*  $M(x)$  erhält man als Summe aller Momente, die durch die Kräfte auf das Teilstück links von  $x$  erzeugt werden, zu

$$M(x) = Q_0 x - \int_0^x (x - z) q(z) dz.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt

$$Q'(x) = -q(x), \quad M'(x) = Q_0 - \int_0^x q(z) dz = Q(x).$$

Das Biegemoment ist somit Lösung der Differentialgleichung

$$M''(x) = -q(x), \quad 0 < x < \ell.$$

<sup>5</sup>Jakob I. Bernoulli, 1655–1705.

<sup>6</sup>Leonhard Euler, 1707–1783.

In der Folge bezeichnet  $E$  den *Elastizitätsmodul* und  $I$  das *axiale Trägheitsmoment* der Querschnittsfläche  $A$ . Nimmt man  $(y, z)$  als Koordinaten transversal zur neutralen Faser des Balkens ( $y$  in Durchbiegungsrichtung), so ist

$$I = \iint_A y^2 d(y, z).$$

Das Produkt  $EI$  heißt *Biegesteifigkeit*. Die *Durchbiegung*  $w(x)$  erhält man aus der Beziehung

$$\text{Biegesteifigkeit} \times \text{Krümmung} + \text{Biegemoment} = 0,$$

$$EI \frac{w''(x)}{(1 + w'(x)^2)^{3/2}} + M(x) = 0, \quad (7.17)$$

was für kleine Auslenkungen auf die lineare Differentialgleichung

$$EIw''(x) = -M(x), \quad 0 < x < \ell$$

führt. Zusammensetzen der Differentialgleichungen für das Biegemoment und die Durchbiegung ergibt die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$EIw''''(x) = q(x), \quad 0 < x < \ell.$$

Zur Lösung sind vier Randbedingungen vorzuschreiben. Diese ergeben sich aus den verschiedenen Kombinationen der Lagerung im linken und rechten Endpunkt. Einige Beispiele (nur linker Endpunkt):

- Gelenkige Lagerung:  $w(0) = 0$ ,  $M(0) = -EIw''(0) = 0$ ;
- Horizontale Einspannung:  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) = 0$ ;
- Freies Ende:  $M(0) = -EIw''(0) = 0$ ,  $Q(0) = -EIw'''(0) = 0$ ;
- Parallelführung:  $w'(0) = 0$ ,  $Q(0) = -EIw'''(0) = 0$ .

**Beispiel 7.14** Wir berechnen das Biegemoment eines gelenkig gelagerten Trägers unter Gleichlast  $q(x) \equiv q_0$ . Wir integrieren die Differentialgleichung  $EIw''''(x) = q_0$  viermal und erhalten

$$\begin{aligned} EIw'''(x) &= q_0x + c_1, \\ EIw''(x) &= \frac{q_0x^2}{2} + c_1x + c_2, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} EIw'(x) &= \frac{q_0x^3}{6} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3, \\ EIw(x) &= \frac{q_0x^4}{24} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Die Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen ermittelt. Bei gelenkiger Lagerung lauten diese

$$M(0) = -EIw''(0) = 0, \quad M(\ell) = -EIw''(\ell) = 0, \quad w(0) = 0, \quad w(\ell) = 0.$$

Die Bedingungen an das Biegemoment ergeben aus Gleichung (7.18):

$$c_2 = 0, \quad c_1 = -\frac{q_0 \ell}{2}.$$

Die weiteren Randbedingungen  $w(0) = 0$ ,  $w(\ell) = 0$  führen mit Gleichung (7.19) auf

$$c_4 = 0, \quad c_3 = \frac{q_0 \ell^3}{24}.$$

Die Durchbiegung ergibt sich somit nach der Formel

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{q_0 x^4}{24} - \frac{q_0 \ell x^3}{12} + \frac{q_0 \ell^3 x}{24} \right).$$

**Der elastisch gelagerte Balken.** Im Falle der so genannten *Winklerbettung*<sup>7</sup>, wie sie zur Modellierung von Schienen im Eisenbahnbau verwendet wird, liegt der Balken auf einer Unterlage, welche eine elastische Rückstellkraft proportional zur Durchbiegung ausübt. Man erhält das Randwertproblem

$$EI w''''(x) + bcw(x) = q(x), \quad 0 < x < \ell,$$

wobei  $q(x)$  die Auflast,  $b$  die effektive Breite und  $c$  einen Lagerungsbeiwert darstellt. Zur Ermittlung der Lösung unter konstanter Auflast  $q_0$  schreiben wir die Koeffizienten in abgekürzter Form

$$w''''(x) + 4k^4 w(x) = q$$

mit  $4k^4 = bc/EI$ ,  $q = q_0/EI$ . Zur Bestimmung der homogenen Lösung betrachten wir die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + 4k^4 = 0.$$

Es ergibt sich zunächst  $\lambda^2 = \pm 2k^2 i$ . Da

$$(1 + i)^2 = (-1 - i)^2 = 2i \quad \text{und} \quad (-1 + i)^2 = (1 - i)^2 = -2i$$

ist, erhalten wir die vier Wurzeln  $\lambda = \pm(1 \pm i)k$ . Wie im Abschnitt 7.2.1 bekommen wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung zu

$$w_h(x) = c_1 e^{kx} \cos kx + c_2 e^{kx} \sin kx + c_3 e^{-kx} \cos kx + c_4 e^{-kx} \sin kx.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist  $x_p(t) \equiv q/4k^4$ . Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist daher

$$w(x) = c_1 e^{kx} \cos kx + c_2 e^{kx} \sin kx + c_3 e^{-kx} \cos kx + c_4 e^{-kx} \sin kx + q/4k^4.$$

Um die Bestimmung der Koeffizienten  $c_1, \dots, c_4$  nicht zu kompliziert zu machen, lösen wir das Problem des halbbunendlichen elastisch gebetteten Balkens, also  $\ell = \infty$ . Im Unendlichen ( $x \rightarrow \infty$ ) verlangen wir, dass die Lösung gegen die partikuläre Lösung  $x_p = q/4k^4$  konvergiert. Dies geht nur, wenn  $c_1 = c_2 = 0$  ist.

---

<sup>7</sup>E. Winkler, 1835–1888.

Für die zweite Ableitung ergibt sich dann nach leichter Rechnung

$$w''(x) = 2c_3 k^2 e^{-kx} \sin kx - 2c_4 k^2 e^{-kx} \cos kx.$$

Im Nullpunkt nehmen wir zum Beispiel gelenkige Lagerung an. Dann muss  $w(0) = 0$  und  $w''(0) = 0$  sein. Die erste Bedingung ergibt  $c_3 = -q/4k^4$ , die zweite  $c_4 = 0$ . Die Lösung des halbbeschränkten Randwertproblems ist

$$w(x) = \frac{q}{4k^4} \left( 1 - e^{-kx} \cos kx \right).$$

## 7.3 Lineare Systeme zweiter Ordnung

### 7.3.1 Der ungedämpfte lineare Zweimassenschwinger

Als einführendes Beispiel betrachten wir die (reibungslöse) Koppelschwingung zweier Massen  $m_1$  und  $m_2$  unter dem Einfluss dreier Federn der Steifigkeiten  $k_1, k_2, k_3$ , wie in Abbildung 7.11 dargestellt.

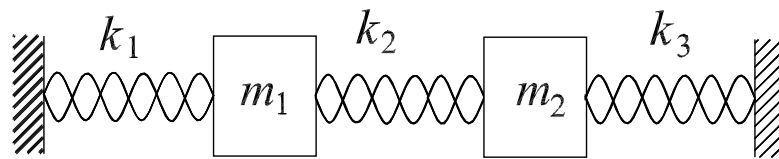


Abbildung 7.11: Freie Koppelschwingung zweier Massen.

Bezeichnet man die Auslenkung der Masse  $m_1$  aus der Ruhelage mit  $x$ , jene von  $m_2$  mit  $y$ , so ergibt das Newton'sche Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}$$

bei linearer Federwirkung

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -k_1 x - k_2 (x - y) \\ m_2 \ddot{y} &= -k_3 y - k_2 (y - x) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + (k_1 + k_2)x - k_2 y &= 0, \\ m_2 \ddot{y} - k_2 x + (k_2 + k_3)y &= 0. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oder

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ . Nach Multiplikation mit  $\mathbf{M}^{-1}$  erhalten wir ein System der Form

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{kurz} \quad \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (7.20)$$

Wir wollen nun die allgemeine Lösung des Systems (7.20) unter der Voraussetzung ermitteln, dass die Matrix  $\mathbf{A}$  zwei reelle, positive Eigenwerte und zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt. Im Beispiel des Zweimassenschwingers ist dies stets der Fall. Wir ermitteln also aus der Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

die zwei Eigenwerte  $\lambda_1 = \omega_1^2$  und  $\lambda_2 = \omega_2^2$  und berechnen zugehörige Eigenvektoren  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_2$  aus

$$(\mathbf{A} - \omega_1^2 \mathbf{I})\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - \omega_2^2 \mathbf{I})\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}.$$

Nun setzen wir die Lösung des Systems (7.20) in der Form

$$\mathbf{x}(t) = u(t)\mathbf{f}_1 + v(t)\mathbf{f}_2$$

an. Einsetzen in (7.20) ergibt

$$\ddot{u}(t)\mathbf{f}_1 + \ddot{v}(t)\mathbf{f}_2 + \mathbf{A}(u(t)\mathbf{f}_1 + v(t)\mathbf{f}_2) = \ddot{u}(t)\mathbf{f}_1 + \ddot{v}(t)\mathbf{f}_2 + \omega_1^2 u(t)\mathbf{f}_1 + \omega_2^2 v(t)\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}.$$

Da  $\mathbf{f}_1$  und  $\mathbf{f}_2$  linear unabhängig sind, ergibt sich das entkoppelte System

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + \omega_1^2 u(t) &= 0, \\ \ddot{v}(t) + \omega_2^2 v(t) &= 0 \end{aligned}$$

für die Koeffizientenfunktionen  $u(t), v(t)$ . Dessen allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} u_h(t) &= C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t, \\ v_h(t) &= D_1 \cos \omega_2 t + D_2 \sin \omega_2 t. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Systems (7.20) ist dann gleich

$$\mathbf{x}_h(t) = u_h(t)\mathbf{f}_1 + v_h(t)\mathbf{f}_2.$$

Jeder der beiden Summanden stellt einen so genannten *Eigenmodus* der Koppelschwingung dar. Die vier Konstanten können aus den Anfangsdaten bestimmt werden.

**Beispiel 7.15** Die Wahl von  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 1$  führt auf das System

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 6x - 2y &= 0 \\ \ddot{y} - 2x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Es ist  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 9\lambda + 14$ . Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 2,$$

eine Basis aus Eigenvektoren ist

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Das entkoppelte System lautet

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + 7u(t) &= 0, \\ \ddot{v}(t) + 2v(t) &= 0; \end{aligned}$$

dessen allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} u_h(t) &= C_1 \cos \sqrt{7}t + C_2 \sin \sqrt{7}t, \\ v_h(t) &= D_1 \cos \sqrt{2}t + D_2 \sin \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des ursprünglichen Systems ist  $\mathbf{x}_h(t) = u_h(t)\mathbf{f}_1 + v_h(t)\mathbf{f}_2$ , also

$$\mathbf{x}_h(t) = (C_1 \cos \sqrt{7}t + C_2 \sin \sqrt{7}t) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + (D_1 \cos \sqrt{2}t + D_2 \sin \sqrt{2}t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} x_h(t) &= 2C_1 \cos \sqrt{7}t + 2C_2 \sin \sqrt{7}t + D_1 \cos \sqrt{2}t + D_2 \sin \sqrt{2}t, \\ y_h(t) &= -C_1 \cos \sqrt{7}t - C_2 \sin \sqrt{7}t + 2D_1 \cos \sqrt{2}t + 2D_2 \sin \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Durch Vorgabe der Anfangswerte  $x_h(0)$ ,  $\dot{x}_h(0)$ ,  $y_h(0)$ ,  $\dot{y}_h(0)$  erhält man ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der vier Konstanten  $C_1, C_2, D_1, D_2$ .

**Entkoppelung durch Transformation.** Die Darstellung der Lösung des Systems (7.20) mittels Eigenmodi kann auch als Koordinatentransformation gedeutet werden. Da die Matrix  $\mathbf{A}$  nach Voraussetzung eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, können wir die Transformationsmatrix

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1 : \mathbf{f}_2]$$

aufstellen. Für diese gilt dann

$$\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{F} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Mit der Koordinatentransformation

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{F} \mathbf{u}(t)$$



erhalten wir aus dem System (7.20)

$$\mathbf{F}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$

Damit ist das System entkoppelt, und wir können  $\mathbf{u}(t) = [u(t), v(t)]^T$  wie oben berechnen. Die Rücktransformation  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}\mathbf{u}(t)$  ergibt dann die Lösung des ursprünglichen Problems.

Auf diese Art und Weise ist es auch möglich, das inhomogene Problem

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$$

zu lösen. Wir machen dieselben Rechengänge wie oben:

$$\mathbf{F}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}(t), \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}(t).$$

Das inhomogene Problem für  $\mathbf{u}(t)$  kann nun gelöst werden;  $\mathbf{x}(t)$  erhält man durch Rücktransformation.

**Beispiel 7.16** Wir wollen das inhomogene Problem

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 6x - 2y &= \sin t \\ \ddot{y} - 2x + 3y &= \sin t \end{aligned}$$

lösen. Im Beispiel 7.15 haben wir Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$  bereits berechnet. Es gilt

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}(t) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \sin t \\ 3 \sin t \end{bmatrix}.$$

Das entkoppelte System  $\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{p}(t)$  lautet

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + 7u(t) &= \frac{1}{5} \sin t, \\ \ddot{v}(t) + 2v(t) &= \frac{3}{5} \sin t. \end{aligned}$$

Wir können eine partikuläre Lösung leicht erraten:

$$u_p(t) = \frac{1}{30} \sin t, \quad v_p(t) = \frac{3}{5} \sin t.$$

Damit ergibt sich eine partikuläre Lösung der ursprünglichen Gleichung durch

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{F}\mathbf{u}_p(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{30} \sin t \\ \frac{3}{5} \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \sin t \\ \frac{7}{6} \sin t \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung erhält man als Summe dieser partikulären Lösung und der im Beispiel 7.15 berechneten allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

### 7.3.2 Der lineare Zweimassenschwinger mit Dämpfung

In der Mechanik wird das Gleichungssystem für einen Zweimassenschwinger mit Dämpfung hergeleitet:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + (r_1 + r_2) \dot{x} - r_2 \dot{y} + (k_1 + k_2)x - k_2 y &= p_1(t) \\ m_2 \ddot{y} - r_2 \dot{x} + r_2 \dot{y} - k_2 x + k_2 y &= p_2(t) \end{aligned} \quad (7.21)$$

mit den Massen  $m_1, m_2$ , den Federsteifigkeiten  $k_1, k_2$ , den Dämpfungskoeffizienten  $r_1, r_2$  und der äußeren Kraftanregung  $p_1(t), p_2(t)$ . In Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

oder

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{p}(t)$$

mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$ . Nach Multiplikation mit  $\mathbf{M}^{-1}$  erhalten wir ein System der Form

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{q}(t).$$

Im Allgemeinen ist so ein System nicht mehr explizit lösbar. Wir können die Matrix  $\mathbf{A}$  wie oben in Diagonalform  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{F}$  bringen. Wenden wir dieselbe Transformation auf die Matrix  $\mathbf{B}$  an, so wird  $\mathbf{R} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{F}$  in der Regel *keine* Diagonalmatrix sein. Stellt sich  $\mathbf{R}$  als Diagonalmatrix heraus, so nennt man  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  *simultan diagonalisierbar*. Nur in diesem wichtigen Ausnahmefall führt die Transformation  $\mathbf{x} = \mathbf{F} \mathbf{u}$  auf das entkoppelte System

$$\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{u} = \mathbf{h}(t)$$

oder ausführlich in

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + \rho_1 \dot{u}(t) + \lambda_1 u(t) &= h_1(t), \\ \ddot{v}(t) + \rho_2 \dot{v}(t) + \lambda_2 v(t) &= h_2(t). \end{aligned}$$

Dieses System kann mit den vorigen Methoden explizit gelöst werden. Man sagt auch, dass die Dämpfung in den Eigenmodi aufgebracht wird.

Im allgemeinen Fall kann man sich auf die Theorie der Systeme erster Ordnung (und beliebiger Dimension) zurückziehen. Wir führen neue Variable ein:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = \dot{x}, \quad x_4 = \dot{y}.$$

Das System (7.21) wird dann zu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ m_1 \dot{x}_3 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + (r_1 + r_2)x_3 - r_2 x_4 &= p_1(t) \\ m_2 \dot{x}_4 - k_2 x_1 + k_2 x_2 - r_2 x_3 + r_2 x_4 &= p_2(t) \end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ k_1 + k_2 & -k_2 & r_1 + r_2 & -r_2 \\ -k_2 & k_2 & -r_2 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$$

Mit  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^\top$  ist das System von der Form

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t)$$

und kann damit auf ein lineares System allgemeiner Form  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t)$  überführt werden. Solche Systeme werden im folgenden Abschnitt 7.4 behandelt.

## 7.4 Allgemeine lineare Systeme im Zustandsraum

Ein wichtiges Thema in der Mechatronik ist der *lineare Regler*. Dieser wird durch ein *dynamisches System* der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y(t) &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

beschrieben. Dabei bedeutet  $t \in \mathbb{R}$  die Zeit. Die Dimensionen sind:  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$ ;  $\mathbf{A}$  ist eine  $(n \times n)$ -Matrix,  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  sind Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Dies wird wie folgt interpretiert:

$u$  ... Eingangsgröße, Steuerung

$\mathbf{x}$  ... Zustandsvariable

$y$  ... Ausgangsgröße, Beobachtung



**Beispiel 7.17** Ein Fahrzeug bewege sich reibungsfrei längs der  $x_1$ -Achse, gesteuert durch Gaspedal und Bremse. Die Zustandsvariablen sind

$x_1(t)$  ... Ort zum Zeitpunkt  $t$ ,

$x_2(t)$  ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$ .

Die Steuervariable ist

$u(t)$  ... Beschleunigungskraft pro Masseneinheit;

dabei ist  $u(t) > 0$  bei positiver Beschleunigung (Gaspedal) und  $u(t) < 0$  beim Abbremsen (Bremspedal). Das System ist

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t),\end{aligned}$$

also

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Als Beobachtungsvariable können wir zum Beispiel den Ort

$$y = x_1, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nehmen oder die Geschwindigkeit

$$y = x_2, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Beispiel 7.18** Die Innentemperatur eines Ofens werde durch Wärmezufuhr  $u$  in der Ummantelung gesteuert. Es bezeichne  $T_0$  die umgebende Außentemperatur,  $T_1$  die Temperatur des Mantels und  $T_2$  die Innentemperatur. Die Parameter des Problems seien:

$c_1, c_2 \dots$  Wärmekapazität des Mantels bzw. des Ofeninneren;

$a_1, a_2 \dots$  Flächeninhalt der inneren bzw. äußeren Oberfläche des Mantels;

$r_1, r_2 \dots$  Wärmedurchgangskoeffizient der inneren bzw. äußeren Oberfläche des Mantels.

Die Differentialgleichungen für die Temperatur im Mantel bzw. im Inneren sind damit

$$\begin{aligned} c_1 \dot{T}_1 &= -a_2 r_2 (T_1 - T_0) - a_1 r_1 (T_1 - T_2) + u, \\ c_2 \dot{T}_2 &= a_1 r_1 (T_1 - T_2). \end{aligned}$$

Führt man die Zustandsvariablen  $x_1 = T_1 - T_0$ ,  $x_2 = T_2 - T_0$  ein, so ergeben sich die Systemmatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(a_2 r_2 + a_1 r_1)/c_1 & a_1 r_1/c_1 \\ a_1 r_1/c_2 & -a_1 r_1/c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/c_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bei Messung der Temperaturdifferenz Mantel-Umgebung ist die Beobachtungsgröße

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Theorie des linearen Reglers geht über den Vorlesungsstoff hinaus. Hier soll nur diskutiert werden, wie ein *allgemeines System* linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.22)$$

gelöst werden kann und was Stabilität bedeutet.

### 7.4.1 Lösung mittels Matrixexponentialfunktion

Wir beginnen mit dem *homogenen linearen System*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Im skalaren Fall ( $n = 1$ ) ist die Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0$$

nach Abschnitt 7.1.2 gegeben durch

$$x(t) = x_0 e^{at} \quad \text{mit} \quad e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots$$

Im Fall eines  $(n \times n)$ -Systems erfolgt die Lösung ebenfalls mittels Exponentialfunktion, allerdings mit der *Matrixexponentialfunktion*:

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}_0,$$

wobei die Matrix  $e^{t\mathbf{A}}$  definiert ist durch

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!} \mathbf{A}^3 + \dots$$

Offensichtlich gilt

$$\frac{d}{dt} e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A} + t\mathbf{A}^2 + \frac{t^2}{2!} \mathbf{A}^3 + \frac{t^3}{3!} \mathbf{A}^4 + \dots = \mathbf{A} e^{t\mathbf{A}}, \quad \frac{d}{dt} \left( e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 \right) = \mathbf{A} \left( e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 \right).$$

Mit  $e^{0\mathbf{A}} = \mathbf{I}$  ist somit klar, dass  $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}_0$  eine Lösung ist.

Die Frage ist, wie sich die Matrixexponentialfunktion auswerten lässt. Wir wollen für  $(2 \times 2)$ -Systeme eine vollständige Antwort geben.

Fall 1: Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist in Diagonalform mit reellen Eigenwerten,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t\lambda_1 & 0 \\ 0 & t\lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^2\lambda_1^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{t^2\lambda_2^2}{2!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^3\lambda_1^3}{3!} & 0 \\ 0 & \frac{t^3\lambda_2^3}{3!} \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

Das zugehörige Differentialgleichungssystem  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  lautet in Komponenten

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \lambda_1 x_1(t), & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda_2 x_2(t), & x_2(0) &= x_{20} \end{aligned}$$

Die Lösung ist tatsächlich

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} x_{10} \\ e^{t\lambda_2} x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Fall 2: Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Schreibt man die Basis aus Eigenvektoren als Spalten in eine Matrix  $\mathbf{F}$ , so gilt

$$\mathbf{F}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{F} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} = \mathbf{F} \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}^{-1}.$$

Die Matrixexponentialfunktion ist dann einfach

$$\begin{aligned}
 e^{t\mathbf{A}} &= e^{t\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1}} \\
 &= \mathbf{I} + t\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1} + \frac{t^3}{3!}\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1} + \dots \\
 &= \mathbf{F}\left(\mathbf{I} + t\mathbf{\Lambda} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{\Lambda}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{\Lambda}^3 + \dots\right)\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}e^{t\mathbf{\Lambda}}\mathbf{F}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Dies ist in Übereinstimmung mit der Lösung des zugehörigen Differentialgleichungssystem  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  durch die Transformation

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t),$$

welche zu einem entkoppelten System führt:

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{z}(t), \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}(t).$$

Dieses hat die Lösung

$$\mathbf{z}(t) = e^{t\mathbf{\Lambda}}\mathbf{z}(0) = e^{t\mathbf{\Lambda}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Rücktransformation ergibt

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}e^{t\mathbf{\Lambda}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{x}_0 = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0.$$

Fall 3: Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist schiefsymmetrisch mit konjugiert komplexen Eigenwerten  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Wir beginnen mit dem einfacheren Fall ( $\alpha = 0, \beta = 1$ )

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^6 = \mathbf{A}^2$$

usw. Aus den ersten Termen der Matrixexponentialfunktion ersieht man deren Form:

$$\begin{aligned}
 e^{t\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{t^3}{6} \\ -\frac{t^3}{6} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^4}{24} & 0 \\ 0 & \frac{t^4}{24} \end{bmatrix} + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \pm \dots & -t + \frac{t^3}{6} \pm \dots \\ t - \frac{t^3}{6} \pm \dots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \pm \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dies entspricht dem System

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -x_2(t), & x_1(0) &= x_{10} \\
 \dot{x}_2(t) &= x_1(t), & x_2(0) &= x_{20}
 \end{aligned}$$

dessen Lösung durch

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \cos t - x_{20} \sin t, \\ x_{10} \sin t + x_{20} \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Im allgemeinen Fall einer schiefsymmetrischen Matrix  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  gilt

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Fall 4: Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist nilpotent, das heißt,  $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$  für ein  $k > 1$ , etwa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{O}.$$

Dann ist

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Dies entspricht der Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= 0, & x_2(0) &= x_{20} \end{aligned}$$

durch

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} + tx_{20} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Dies ist ein Spezialfall einer Matrix  $\mathbf{A}$ , die einen doppelten reellen Eigenwert besitzt, aber nicht diagonalisierbar ist. Die Grundform einer solchen Matrix ist  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ . Dann gilt

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

usw. Man erhält

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t\lambda & t \\ 0 & t\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^2\lambda^2}{2!} & \frac{2t^2\lambda}{2!} \\ 0 & \frac{t^2\lambda^2}{2!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^3\lambda^3}{3!} & \frac{3t^3\lambda^2}{3!} \\ 0 & \frac{t^3\lambda^3}{3!} \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{bmatrix}.$$

Alle anderen Fälle lassen sich durch Transformation auf die genannten zurückführen.

Die Lösung des *inhomogenen Problems*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

erhält man wie im skalaren Fall durch Variation der Konstanten zu

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \mathbf{h}(\tau) d\tau.$$

**Beispiel 7.19** Die Matrix  $\mathbf{A}$  sei gegeben durch  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ . Nach Fall 1 oben gilt

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + e^{-t}, & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + 1, & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\tau} \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2t-3\tau} \\ e^{-2t+2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{2t-3\tau} \\ \frac{1}{2}e^{-2t+2\tau} \end{bmatrix} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 7.4.2 Stabilität

Wir fragen nach dem Langzeitverhalten der Lösungen eines homogenen linearen Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (7.26)$$

das heißt, ob für  $t \rightarrow \infty$  die Lösungen beschränkt bleiben, gegen Null gehen oder ob einzelne Komponenten nach Unendlich streben. Eine Lösungskurve  $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$  wird als *beschränkt* bezeichnet, wenn es eine Schranke  $M$  gibt, so dass gilt:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

**Definition 7.20** (a) Das System (7.26) heißt *stabil*, falls die Lösungen  $\mathbf{x}(t)$  zu beliebigen Anfangswerten stets beschränkt bleiben.

(b) Das System (7.26) heißt *asymptotisch stabil*, falls die Lösungen  $\mathbf{x}(t)$  zu beliebigen Anfangswerten stets gegen  $\mathbf{0}$  konvergieren.

Andernfalls wird das System als *instabil* bezeichnet. Wir analysieren die Fälle 1 – 4 im Hinblick auf Stabilität. Fall 1 ist rasch erledigt. Es gilt ja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\lambda} = \infty, \text{ falls } \lambda > 0 \text{ ist;}$$

$$e^{t\lambda} \equiv 1, \text{ falls } \lambda = 0 \text{ ist;}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\lambda} = 0, \text{ falls } \lambda < 0 \text{ ist.}$$

Im Fall 1 ergibt die Formel (7.23):



Das System ist genau dann stabil, wenn  $\lambda_1 \leq 0$  und  $\lambda_2 \leq 0$  sind.

Das System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn  $\lambda_1 < 0$  und  $\lambda_2 < 0$  sind.

Da sich Fall 2 durch eine Koordinatentransformation auf Fall 1 zurückführen lässt und dann  $\lambda_1, \lambda_2$  gerade die (reellen) Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  sind, wird die Stabilität durch das Vorzeichen der Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  beschrieben.

Im Fall 3 zeigt Formel (7.24):

Das System ist genau dann stabil, wenn  $\alpha \leq 0$  ist.

Das System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn  $\alpha < 0$  ist.

Wie oben gesagt, sind die Eigenwerte einer schiefsymmetrischen Matrix aus Fall 3 gerade  $\alpha \pm \beta$ ;  $\alpha$  ist deren Realteil. Wir können zusammenfassen:

**Satz 7.21** Für die Matrix  $\mathbf{A}$  treffe einer der Fälle 1 – 3 zu. Dann gilt: Das zugehörige lineare System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn sämtliche Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  einen negativen Realteil besitzen. Es ist genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  einen Realteil kleiner oder gleich Null besitzen.

Der Fall 4 stellt sich als Sonderfall dar. Formel (7.25) zeigt, dass die Lösungen linear mit  $t$  wachsen können, obwohl die Eigenwerte gleich Null sind. Bei einer Matrix der Form  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$  muss  $\lambda < 0$  sein, damit das zugehörige lineare System stabil ist. (Es ist dann auch bereits asymptotisch stabil.)

Für einen linearen Regler der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{0} \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

ist eine andere Art der Stabilität von Interesse, nämlich die *Eingangs-/Ausgangs-Stabilität*. Diese liegt vor, falls beschränkte Eingänge  $u(t)$  stets zu beschränkten Ausgängen  $y(t)$  führen. Meistens wird hier vom Anfangswert  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  ausgegangen. (Die Stabilitätsaussagen gelten aber auch für beliebige Anfangswerte.) Mit Hilfe der Lösungsformel

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \mathbf{b}u(\tau) d\tau, \quad y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t),$$

der Tatsache, dass im Integranden  $t - \tau \geq 0$  ist, und den Überlegungen, die zu Satz 7.21 geführt haben, sieht man:

Eingangs-/Ausgangs-Stabilität liegt stets vor, falls die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  negative Realteile besitzen.

Falls die Matrix in Fall 1 – 3 fällt, so genügt es, dass die Realteile kleiner oder gleich Null sind.

# Kapitel 8

## Fourierreihen

Im Abschnitt 7.2.1 haben wir gesehen, wie Schwingungen derselben Periode überlagert werden können. Wir fragen, was bei Überlagerung von harmonischen Schwingungen unterschiedlicher Periode passiert. Als Beispiel nehmen wir eine Überlagerung (genauer: Linearkombination) von  $\sin x$ ,  $\sin 3x$  und  $\sin 5x$ . Abbildung 1 zeigt die harmonischen Schwingungen  $y = \frac{4}{\pi} \sin x$ ,  $y = \frac{4}{3\pi} \sin 3x$ ,  $y = \frac{4}{5\pi} \sin 5x$  und deren Summe.

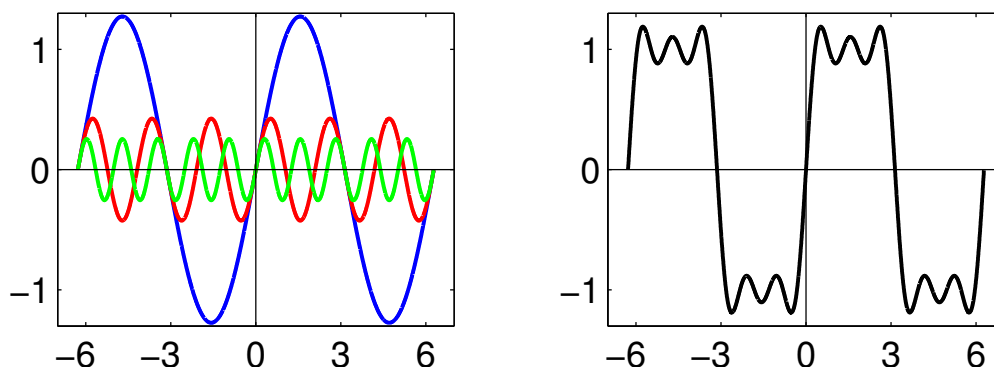


Abbildung 8.1: Überlagerung dreier harmonischer Schwingungen.

Man erkennt, dass die Summe gänzlich neue Verlaufseigenschaften hat. Das legt die Frage nahe, ob nicht jede Funktion durch eine – möglicherweise – unendliche Summe von harmonischen Schwingungen dargestellt werden kann. Wir beginnen mit der Darstellung durch Sinusfunktionen; der allgemeine Fall von Kombinationen von Sinus- und Cosinusfunktionen folgt anschließend. Außerdem beginnen wir zunächst auf einem Intervall der Länge  $L = \pi$ , um die Notation einfach zu halten.

## 8.1 Fouriersinusreihen

Es sei  $a$  eine auf dem Intervall  $[0, \pi]$  definierte reellwertige und Riemann-integrierbare Funktion. Eine Darstellung der Form

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \quad (8.1)$$

nennt man eine *Fouriersinusreihe*.<sup>1</sup> Wir lassen zunächst die Frage der Konvergenz dieser unendlichen Reihe beiseite und untersuchen, wie sich – im Falle der Konvergenz – ihre Koeffizienten berechnen lassen. Wir multiplizieren dazu (8.1) mit  $\sin \ell x$  und integrieren von 0 bis  $\pi$ :

$$\int_0^{\pi} a(x) \sin \ell x \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\pi} \sin kx \sin \ell x \, dx$$

unter der Annahme, dass die Vertauschung der unendlichen Summe mit dem Integral gerechtfertigt ist. Aus der Formel

$$2 \sin kx \sin \ell x = \cos(k - \ell)x - \cos(k + \ell)x$$

erhält man

$$\int_0^{\pi} \sin kx \sin \ell x \, dx = 0, \quad k \neq \ell$$

und

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \ell x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\ell x) \, dx = \frac{\pi}{2}, \quad k = \ell.$$

Es folgt

$$\int_0^{\pi} a(x) \sin \ell x \, dx = \frac{\pi}{2} a_{\ell}.$$

Gilt also eine Darstellung der Funktion  $a(x)$  in der Form (8.1), so sind die Koeffizienten notwendigerweise von der Form

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a(x) \sin kx \, dx. \quad (8.2)$$

**Beispiel 8.1** Als erstes, einfachstes Beispiel nehmen wir  $a(x) = 1$  und erhalten

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\cos kx}{k} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k\pi} \left( -\cos k\pi + 1 \right) = \frac{2}{k\pi} \left( 1 - (-1)^k \right).$$

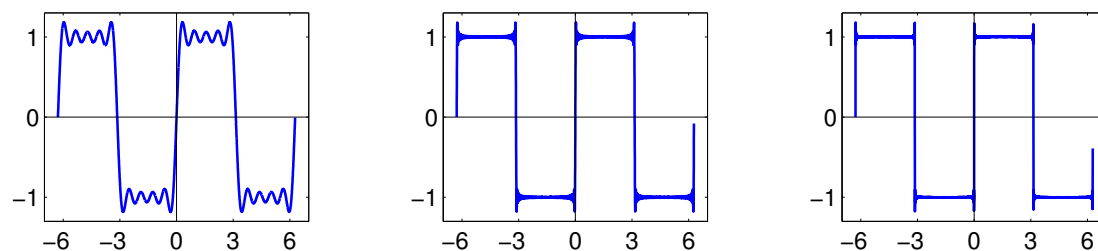
Somit ist  $a_k = 0$ , wenn  $k$  gerade ist und  $a_k = 4/k\pi$ , wenn  $k$  ungerade ist. Insbesondere ergibt sich die Formel

$$\frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} \sin(2j-1)x = 1, \quad x \in (0, \pi).$$

Dass die Fouriersinusreihe die Funktion  $a(x) \equiv 1$  im Intervall  $(0, \pi)$  mit wachsender Summandenzahl immer besser approximiert, ist aus Abbildung 8.1 ersichtlich.

---

<sup>1</sup>J.B.J. Fourier, 1768–1830.

Abbildung 8.2: Die Fouriersinusreihe von  $a(x) = 1$  mit 5, 50 und 250 Summanden.

In der Nähe der Stellen  $x = 0$  und  $x = \pi$  scheint eine gewisse Abweichung zwischen der Funktion  $a(x)$  und der Fouriersinusreihe aufzutreten. Der Effekt wird weiter unten geklärt. Wir wollen daher vorerst den Wert der Fourierreihe mit einer neuen Bezeichnung versehen:

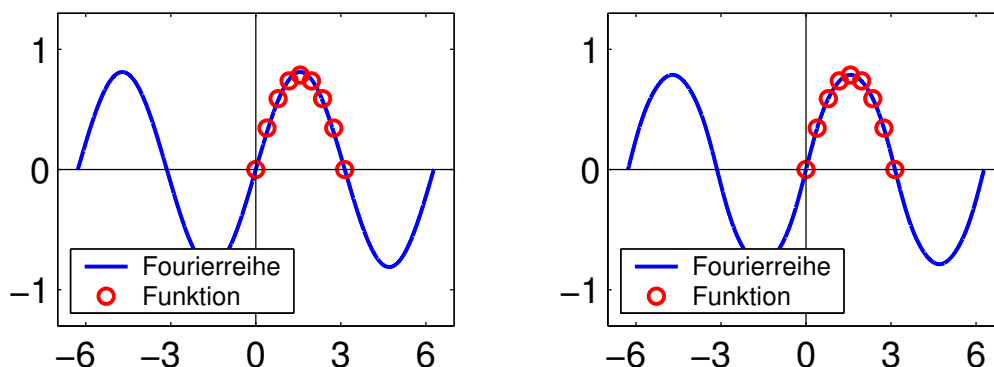
$$\tilde{a}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx. \quad (8.3)$$

Die Reihe (8.3) stellt eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Funktion dar. Sie ist periodisch mit Periode  $2\pi$  und ungerade (d.h.,  $\tilde{a}(-x) = -\tilde{a}(x)$ ). Weiter ist  $\tilde{a}(k\pi) = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Insbesondere ist in den Randpunkten  $0 = \tilde{a}(0) \neq a(0) = 1$ , ebenso  $\tilde{a}(\pi) \neq a(\pi)$ , vgl. Abbildung 8.1.

**Beispiel 8.2** Als zweites Beispiel nehmen wir  $a(x) = \pi x - x^2$  und erhalten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\cos kx}{k} (\pi x - x^2) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \cos kx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{k\pi} \left( \frac{\sin kx}{k} (\pi - 2x) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \right) \\ &= -\frac{4}{k^3\pi} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{k^3\pi} (1 - (-1)^k). \end{aligned}$$

Die durch die Reihe  $\tilde{a}(x)$  dargestellte Funktion ist stetig; die Approximation an  $a(x)$  ist deutlich besser als in Beispiel 8.1.

Abbildung 8.3: Die Fouriersinusreihe von  $a(x) = x - x^2/\pi$  mit 1 und 3 Summanden.

**Beispiel 8.3** Die Fouriersinusreihe der Sägezahnfunktion  $a(x) = x/\pi$ ,  $-\pi < x < \pi$  lautet (Herleitung als Übung!)

$$a(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sin jx.$$

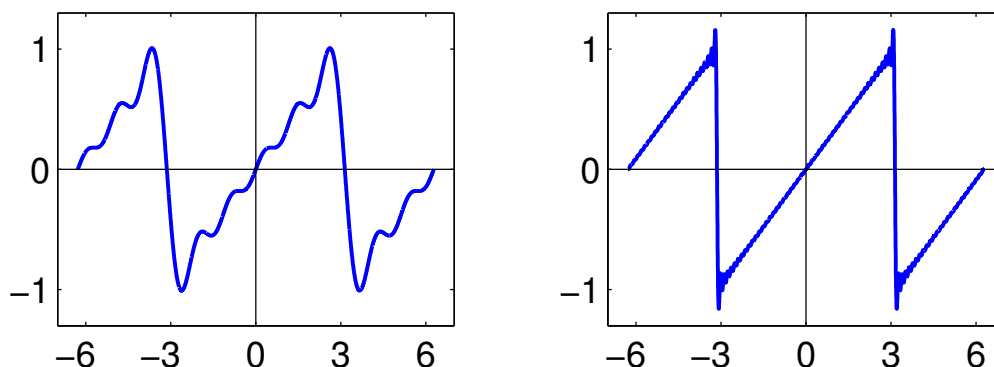


Abbildung 8.4: Die Fouriersinusreihe der Sägezahnfunktion  $a(x) = x/\pi$ ,  $-\pi < x < \pi$  mit 5 und 50 Summanden.

## 8.2 Allgemeine Fourierreihen

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion, die auf  $[-\pi, \pi]$  Riemann-integrierbar sein möge. Eine Darstellung der Form

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

wird als *Fourierreihe* für  $f$  bezeichnet. Falls so eine Darstellung existiert, muss notwendigerweise gelten

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \\ A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \end{aligned}$$

was ähnlich wie im Fall von Fouriersinusreihen hergeleitet werden kann.

**Bemerkung 8.4** Falls  $f$  eine gerade Funktion ist, also  $f(x) = f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so

gilt

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx, \\ A_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx, \\ B_k &= 0. \end{aligned}$$

Falls  $f$  eine ungerade Funktion ist, also  $f(x) = -f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$\begin{aligned} A_k &= 0, \\ B_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx. \end{aligned}$$

Die Entwicklung von  $f$  auf dem Intervall  $[0, \pi]$  in eine Fouriersinusreihe bzw. Fourierkosinusreihe erfolgt durch ungerade bzw. gerade Fortsetzung von  $f$  auf  $[-\pi, \pi]$  und Entwicklung in eine Fourierreihe.

*Fourierreihen beliebiger Periode.* Wir betrachten eine  $2L$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $[-L, L]$  Riemann-integrierbar sein möge. Eine Darstellung der Form

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{k\pi x}{L} + B_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (8.4)$$

wird als *Fourierreihe* für  $f$  bezeichnet. Falls so eine Darstellung existiert, muss notwendigerweise gelten

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \, dx, \\ A_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} \, dx, \\ B_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \, dx. \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun der Frage der Konvergenz der Fourierreihen zu.

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *stückweise  $k$ -mal differenzierbar*, falls es Punkte  $\dots p_{-2} < p_{-1} < p_0 < p_1 < p_2 < \dots$  in  $\mathbb{R}$  gibt, sodass  $f$  auf jedem Teilintervall  $(p_{j-1}, p_j)$   $k$ -mal stetig differenzierbar ist mit links- und rechtsseitigen Grenzwerten in den Randpunkten.

Man beachte, dass eine stückweise differenzierbare Funktion an den Punkten  $p_j$  Sprünge oder Sprünge in der Ableitung aufweisen kann.

**Satz 8.5** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2L$ -periodische Funktion.

(a) Falls  $f$  einmal stückweise stetig differenzierbar ist, so konvergiert die Fourierreihe von  $f$  und es gilt

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{k\pi x}{L} + B_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right).$$

(b) Falls  $f$  stetig und einmal stückweise stetig differenzierbar ist, so gilt

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{k\pi x}{L} + B_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right).$$

(c) Falls  $f$   $j$ -mal stetig differenzierbar und  $(j+1)$ -mal stückweise stetig differenzierbar ist, so kann die Fourierreihe  $j$ -mal gliedweise differenziert werden und die abgeleitete Reihe konvergiert gegen  $\partial^j f / \partial x^j$ .

Der Beweis des Satzes wird in der Theorie der trigonometrischen Reihen gegeben. Teil (a) besagt, dass sich in den Sprungstellen der Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts ergibt.

**Bemerkung 8.6** Im Hinblick auf Fourierreihenentwicklung zeitabhängiger Funktionen ist es günstig, die Darstellung (8.4) umzuformen. Wir setzen

$$\nu = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{2L}$$

und erhalten die Fourierreihe in der Form

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos k\nu x + B_k \sin k\nu x \right).$$

Für  $k=1$  ergeben sich die beiden *Grundschnwingungen*  $\cos \nu x$  und  $\sin \nu x$ . Diese besitzen die Kreisfrequenz  $\nu$ , die Periodenlänge  $2L$  und die Frequenz  $\nu/2\pi = 1/2L$ ; vergleiche Beispiel 7.10. Die Terme  $\cos k\nu x$  und  $\sin k\nu x$  für  $k > 1$  stellen die *Oberschnwingungen* dar mit Kreisfrequenz  $k\nu$ , Periodenlänge  $2L/k$  und Frequenz  $k\nu/2\pi = k/2L$ . Die Frequenz der  $k$ -ten Oberschnwingung ist das  $k$ -fache der Grundfrequenz.

## 8.3 Fourierreihen und gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir haben im Abschnitt 7.2 das Problem einer erzwungenen Schwingung

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = p(t) \tag{8.5}$$

gelöst, wobei wir speziell für die Inhomogenität ein Vielfaches von  $\cos \nu t$  genommen haben. Die Erregerschwingung hatte Kreisfrequenz  $\nu$ . Damit ist ihre Frequenz gleich  $\nu/2\pi$ . Die Periodenlänge bezeichnen wir mit  $\tau$  (das entspricht  $2L$  im Abschnitt 8.2). Die Periodenlänge der Erregerschwingung ist somit

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu}.$$

Wir wollen nun Gleichung (8.5) mit beliebiger  $\tau$ -periodischer Anregung  $p(t)$  lösen. Wir schreiben  $p(t)$  als Fourierreihe

$$p(t) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (p_k \cos k\nu t + q_k \sin k\nu t).$$

Die Idee ist nun, die Lösung  $x(t)$  ebenfalls als Fourierreihe anzusetzen und mittels Koeffizientenvergleich zu bestimmen. Um die Rechnungen nicht zu kompliziert zu gestalten, betrachten wir statt des allgemeinen Falls hier nur den Spezialfall einer Fourierkosinusreihe und einer ungedämpften Schwingung. Wir wollen also das Problem

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cos k\nu t \quad (8.6)$$

lösen. Dazu setzen wir  $x(t)$  ebenfalls in Form einer Fourierkosinusreihe an und leiten zweimal ab:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\nu t, \\ \ddot{x}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-A_k k^2 \nu^2 \cos k\nu t). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich in  $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = p(t)$  ergibt

$$-A_k k^2 \nu^2 + A_k \omega^2 = p_k \quad \text{bzw.} \quad A_k = \frac{p_k}{\omega^2 - k^2 \nu^2}.$$

Eine partikuläre Lösung von (8.6) ist demnach

$$x_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{\omega^2 - k^2 \nu^2} \cos k\nu t.$$

Die allgemeine Lösung erhält man wieder durch Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Der Resonanzfall  $\omega = k\nu$  ist hier natürlich auszuschließen.

**Beispiel 8.7** Wir lösen

$$\ddot{x}(t) + 2x(t) = \cos t + 2 \cos 3t + \cos 5t.$$

Mit  $\omega = \sqrt{2}$ ,  $\nu = 1$ ,  $p_0 = p_2 = p_4 = 0$  und  $p_1 = p_5 = 1$ ,  $p_3 = 2$  erhalten wir als allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t + \cos t - \frac{2}{7} \cos 3t - \frac{1}{23} \cos 5t.$$

## 8.4 Eine Anwendung auf die Poissongleichung

Wir erinnern zunächst an einige Anwendungen des Laplaceoperators<sup>2</sup>. Zur Illustration bleiben wir im Zweidimensionalen. Der Laplaceoperator lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

---

<sup>2</sup>P.S. Laplace, 1749–1827.



Die *homogene* Gleichung für eine gesuchte Funktion  $u(x, y)$  auf einem Gebiet  $B$  nennt man *Laplacegleichung*

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in B;$$

die *inhomogene* Gleichung nennt man *Poissongleichung*<sup>3</sup>

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in B;$$

aus Gründen der Herleitung oft auch in der Form  $-\Delta u(x, y) = f(x, y)$  geschrieben. Dazu sind *Randwerte* vorzuschreiben, in der Regel

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial B \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = h(x, y), \quad (x, y) \in \partial B,$$

wobei  $\partial u / \partial \mathbf{n}$  die Richtungsableitung von  $u$  in Richtung der äußeren Normalen  $\mathbf{n}$  bezeichnet. Im ersten Fall spricht man von einer *Dirichlet'schen*<sup>4</sup> Randwertaufgabe, im zweiten von einer *Neumann'schen*.<sup>5</sup> Auch Kombinationen der beiden treten in der Festigkeitslehre auf. Einige Anwendungen des Laplaceoperators sind:

- Das Geschwindigkeitspotential einer quellen- und wirbelfreien Strömung erfüllt die Laplacegleichung  $\Delta \Psi = 0$  (siehe Abschnitt 5.3).
- Die stationäre Temperaturverteilung  $u(x, y)$  in einem Körper  $B$  unter der Temperaturanregung  $f(x, y)$  erfüllt  $-K \Delta u(x, y) = f(x, y)$ ;  $K$  die Temperaturleitfähigkeit. Ist die Temperatur am Rand vorgegeben, so erhält man Dirichlet'sche Randbedingungen  $u = g$  längs  $\partial B$ , ist der Wärmefluss vorgegeben, so erhält man  $\partial u / \partial \mathbf{n} = h$  längs  $\partial B$ .
- Die Auslenkung  $u(x, y)$  einer Membran in vertikaler Richtung unter Belastung  $f(x, y)$  erfüllt  $-\mu \Delta u(x, y) = f(x, y)$ ,  $\mu$  die Vorspannung; ist die Membran am Rand eingespannt, so ergeben sich Dirichlet'sche Randbedingungen.
- Mit dem Schubmodul  $G$  und der Verwindung  $\vartheta$  erfüllt die Torsionsfunktion eines Stabquerschnitts  $B$  die Poissongleichung  $\Delta u(x, y) = -2G\vartheta$ , mit Dirichlet'schen Randbedingungen  $u(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in \partial B$ , wie in der Festigkeitslehre hergeleitet wird.

**Die Torsionsfunktion eines rechteckigen Querschnitts:** Als Anwendung der Fouriersinusreihen können wir eine Formel für die Torsionsfunktion eines Rechtecksquerschnitts  $B$  der Form

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq M$$

herleiten. Zu lösen ist die Randwertaufgabe

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = -2G\vartheta, \quad (x, y) \in B$$

---

<sup>3</sup>S.D. Poisson, 1781–1840.

<sup>4</sup>P.G. Lejeune Dirichlet, 1805–1859.

<sup>5</sup>C.G. Neumann, 1832–1925.

mit der Randbedingung  $u(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in \partial B$ .

Wir haben im Beispiel 8.1 die Fouriersinusreihe der Funktion  $f(x) \equiv 1$  auf dem Intervall  $[0, \pi]$  berechnet. Wir wiederholen die Rechnung auf dem Intervall  $[0, L]$ , wobei wir  $f$  ungerade fortsetzen, also  $f(x) \equiv -1$  für  $-L \leq x < 0$  setzen. Die Koeffizienten der Fouriersinusreihe sind dann

$$B_k = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \left( -\frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{L} \right) \Big|_0^L = \frac{2}{k\pi} \left( -\cos k\pi + 1 \right) = \frac{2}{k\pi} \left( 1 - (-1)^k \right).$$

Somit gilt

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{(2j-1)\pi} \sin \frac{(2j-1)\pi x}{L}.$$

Ebenso zeigt man in der  $y$ -Variable

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{M},$$

zusammengenommen also

$$-2G\vartheta = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-32G\vartheta}{(2j-1)(2k-1)\pi^2} \sin \frac{(2j-1)\pi x}{L} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{M}.$$

Wir machen für die Torsionsfunktion den Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \sin \frac{(2j-1)\pi x}{L} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{M}.$$

Der Ansatz mittels Fouriersinusreihen garantiert, dass die Randwerte (bei  $x = 0$ ,  $x = L$ ,  $y = 0$ ,  $y = M$ ) gleich Null sind. Nach zweimaligem Ableiten folgt

$$\Delta u(x, y) = - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \left( \frac{(2j-1)^2 \pi^2}{L^2} + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{M^2} \right) \sin \frac{(2j-1)\pi x}{L} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{M}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$c_{jk} = \frac{32G\vartheta L^2 M^2}{(2j-1)(2k-1)\pi^4 ((2j-1)^2 M^2 + (2k-1)^2 L^2)},$$

womit die Torsionsfunktion bestimmt ist.

**Die Torsionsfunktion eines elliptischen Querschnitts.** Wir nehmen für  $B$  den Bereich, der durch die Ellipse

$$\partial B = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

berandet wird. In diesem Fall kann die Torsionsfunktion explizit angegeben werden, nämlich

$$u(x, y) = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) G\vartheta.$$

Offensichtlich ist  $u(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in \partial B$ . Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Gleichung  $\Delta u(x, y) = -2G\vartheta$  ebenfalls erfüllt ist.

## 8.5 Eine Anwendung auf die Diffusionsgleichung

Die einfachste partielle Differentialgleichung, die mittels *Separationsansatz* und *Fourierreihenentwicklung* gelöst werden kann, ist die Diffusionsgleichung. Die Anwendung dieses Verfahrens soll in diesem Abschnitt vorgeführt werden. Die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) - K \frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho(x, t) = 0.$$

wurde in Beispiel 5.13 hergeleitet. Sie beschreibt die Dichte  $\rho(x, t)$  einer Substanz, die in einem eindimensionalen Medium diffundiert. Dabei ist  $K$  der Diffusionskoeffizient. Dieselbe Gleichung beschreibt die Wärmeausbreitung in einem eindimensionalen Körper, zum Beispiel einem Stab. In diesem Fall ist  $\rho(x, t)$  die Temperatur und  $K$  die Temperaturleitfähigkeit des Körpers.

**Wärmeleitung in einem endlichen Stab.** Wir nehmen an, dass es sich bei dem Körper um einen dünnen Stab der Länge  $L$  handelt. Wir stellen diesen als Intervall  $[0, L]$  dar. Die Temperatur, für die wir jetzt  $u(x, t)$  schreiben, hängt dann von der Ortskoordinate  $x \in [0, L]$  und der Zeitkoordinate ab, welche wir ab einem Startzeitpunkt vorwärts rechnen ( $t \geq 0$ ). Wir wählen ein Maßsystem, in dem  $K = 1$  ist und setzen aus Gründen, die aus der folgenden Herleitung klar werden, vorläufig  $L = \pi$ . Die partielle Differentialgleichung, die die Temperaturentwicklung im Stab beschreibt, ist dann

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t), \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0. \quad (8.7)$$

Um die Lösung festzulegen, sind noch Rand- und Anfangsbedingungen vorzuschreiben. Wir nehmen als Randbedingung

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0. \quad (8.8)$$

Schließlich sei die Anfangstemperaturverteilung zum Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt:

$$u(x, 0) = a(x) \quad \text{für } x \in [0, \pi]. \quad (8.9)$$

Die Ermittlung einer Lösung werden wir *heuristisch* vornehmen, das heißt mit Hilfe eines Ansatzes, ohne auf die Voraussetzungen zu achten, die die nachfolgenden Rechnungen erlauben würden. Wir werden dann im Nachhinein verifizieren, dass die gefundene Funktion  $u(x, t)$  unter geeigneten Voraussetzungen an den Anfangswert  $a(x)$  tatsächlich eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems (8.8), (8.9) für die Wärmeleitungsgleichung (8.7) ist. Die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung wird in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen beantwortet.

**Separationsansatz.** Eine der traditionellen Methoden, explizite Lösungen partieller Differentialgleichung in Bereichen von einfacher Form zu gewinnen, ist der *Separationsansatz*. Dabei werden Lösungen der Form

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (8.10)$$

gesucht, also von der Form eines Produktes von Funktionen, die jeweils nur von einer der Variablen abhängen. Setzt man (8.10) in der Gleichung (8.7) ein, so ergibt sich

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (8.11)$$

Setzen wir rechts ein festes  $x$  ein, zum Beispiel  $x = 1$ , so ist die rechte Seite eine Konstante  $\mu = X''(1)/X(1)$ . Daher hängt die linke Seite nicht von  $t$  ab und ist konstant gleich  $\mu$ . Dies wiederum hat zur Folge, dass auch die rechte Seite nicht von  $x$  abhängt, es muss also gelten:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \mu \quad \text{und} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu \quad \text{für alle} \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0 \quad (8.12)$$

mit einer Konstanten  $\mu \in \mathbb{R}$ . Aus (8.12) ergeben sich zwei getrennte gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen  $T(t)$  und  $X(x)$ .

**Lösung der Differentialgleichung für  $T(t)$ :** Die Gleichung ist

$$T'(t) = \mu T(t)$$

und deren allgemeine Lösung ist aus Beispiel 7.4 bekannt:

$$T(t) = Ce^{\mu t}$$

mit einer beliebigen Konstanten  $C$ .

**Lösung der Differentialgleichung für  $X(x)$ :** Es handelt sich um die Differentialgleichung

$$X''(x) - \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Die Randbedingung (8.8) besagt, dass  $X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$  ist für alle  $t > 0$ . Dies ist (außer wenn  $T(t)$  identisch verschwindet) nur möglich, wenn gilt

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Wir erhalten damit ein *Eigenwertproblem*. Wir suchen Werte für  $\mu$ , so dass die Randwertaufgabe von Null verschiedene Lösungen  $X(x)$  besitzt (die Lösung  $X(x) \equiv 0$  gibt es offensichtlich, sie hilft uns aber keinen Schritt weiter).

Drei Fälle sind zu unterscheiden.

*Fall 1:*  $\mu = \lambda^2 > 0$  mit  $\lambda > 0$ . Eine Lösungsschar ist offenbar

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$$

mit beliebigen Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

*Fall 2:*  $\mu = 0$ . Eine Lösungsschar ist offenbar

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

mit beliebigen Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Fall 3:  $\mu = -\lambda^2 < 0$  mit  $\lambda > 0$ . Eine Lösungsschar ist offenbar

$$X(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x$$

mit beliebigen Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Im Fall 1 führt die Randbedingung auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 0, \\ c_1 e^{\lambda\pi} & + & c_2 e^{-\lambda\pi} = 0 \end{array}$$

und damit zu  $c_1 = c_2 = 0$ . Ebenso führt der Fall 2 auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & 0, \\ c_1 & + & c_2 \pi = 0. \end{array}$$

Diese Fälle ergeben nur die Nulllösung und scheiden damit aus. Der Fall 3 führt auf

$$\begin{array}{rcl} c_1 \sin 0 & + & c_2 \cos 0 = 0, \\ c_1 \sin \lambda\pi & + & c_2 \cos \lambda\pi = 0, \end{array}$$

also

$$c_2 = 0 \quad \text{und} \quad \sin \lambda\pi = 0.$$

Letztere Bedingung ist erfüllt, wenn gilt

$$\lambda = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Wir erhalten somit die *Eigenwerte* und *Eigenfunktionen* des Randwertproblems für  $X(x)$  zu

$$\mu = -k^2, \quad X_k(x) = \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die zugehörige Lösung  $T(t)$  ist gleich

$$T_k(t) = e^{-k^2 t}.$$

Multiplikation laut Ansatz ergibt, dass die Funktion

$$u_k(x, t) = e^{-k^2 t} \sin kx$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (8.7) ist, welche die Randbedingung (8.8) erfüllt. Endliche Linearkombinationen

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{-k^2 t} \sin kx$$

sind dann ebenfalls Lösungen. Unter der Annahme der Konvergenz samt allen geforderten Ableitungen ist dann auch die unendliche Summe

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin kx \tag{8.13}$$

eine Lösung. Mit dieser Lösung in Form einer unendlichen Summe können wir hoffen, die Anfangsbedingung (8.9) zu erfüllen:

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx.$$

Es verbleibt also als letzter Schritt, den Anfangswert  $a(x)$  in eine Fouriersinusreihe zu entwickeln.

**Satz 8.8** (Formale Lösung der Wärmeleitungsgleichung) Das Anfangs-Randwertproblem (8.8), (8.9) der Wärmeleitungsgleichung (8.7) besitzt die formale Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin kx$$

mit den Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a(x) \sin kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit diese *formale Lösung* eine tatsächliche Lösung ist, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Die  $u(x, t)$  definierende Reihe konvergiert für alle  $(x, t)$  im Streifen  $x \in [0, \pi]$ ,  $t \geq 0$ ;
- $a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ ;
- $u(x, t)$  ist auf dem Streifen  $x \in [0, \pi]$ ,  $t \geq 0$  stetig.
- Die  $u(x, t)$  definierende Reihe darf im offenen Streifen  $x \in (0, \pi)$ ,  $t > 0$  gliedweise einmal nach  $t$  und zweimal nach  $x$  differenziert werden.

Diese Bedingungen können erfüllt werden, wenn der Anfangswert  $a(x)$  hinreichend oft differenzierbar ist (vergleiche dazu Satz 8.5).

**Beispiel 8.9** (Der Anfangswert  $a(x) = c$ ) Dabei besitzt der Stab zum Anfangszeitpunkt die konstante Temperatur  $c$ , während die Stabenden auf Temperatur 0 gehalten werden. Die Fourierreihe einer konstanten Funktion wurde in Beispiel 8.1 hergeleitet. Die Fourierkoeffizienten lauten demnach

$$a_k = \frac{2c}{k\pi} \left(1 - (-1)^k\right).$$

Für gerades  $k = 2j$  ist  $a_{2j} = 0$ , für ungerades  $k = 2j - 1$  ist

$$a_{2j-1} = \frac{4c}{\pi(2j-1)}.$$

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung nach Satz 8.8 ist daher

$$u(x, t) = \frac{4c}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1} e^{-(2j-1)^2 t} \sin(2j-1)x, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0.$$

# Kapitel 9

## Ergänzungen zur Analysis

In diesem Kapitel tragen wir einige Themen nach, die im ersten Semester nicht mehr untergebracht werden konnten, aber doch in den Ingenieurwissenschaften wichtige mathematische Methoden darstellen.

### 9.1 Uneigentliche Integrale

Bei der Einführung des Riemannintegrals im Kapitel 2 wurde vorausgesetzt, dass das Integrationsintervall  $[a, b]$  beschränkt ist ( $a \neq -\infty$ ,  $b \neq \infty$ ) und dass die zu integrierende Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  beschränkt ist. Unter geeigneten Voraussetzungen ist es möglich, dem Integral  $\int_a^b f(x) dx$  auch bei unbeschränktem Integrationsbereich oder unbeschränktem Integranden durch einen zusätzlichen Grenzübergang einen Sinn zu geben. Man spricht dann von einem *uneigentlichen Integral*.

**Unbeschränkter Integrationsbereich.** Es sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die auf jedem beschränkten Teilintervall  $[a, b]$ ,  $a < b < \infty$ , Riemann-integrierbar ist. Man definiert das *uneigentliche Integral*

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

falls der Grenzwert existiert. Man sagt dann auch, dass das uneigentliche Integral *existiert* oder *konvergiert*. Wenn der Grenzwert nicht existiert, wird das uneigentliche Integral als *divergent* bezeichnet; von *bestimmter Divergenz* spricht man, wenn der Grenzwert gleich  $\pm\infty$  ist.

**Beispiel 9.1** (a) 
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) 
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\log b - \log 1) = \infty \quad (\text{bestimmte Divergenz})$$

$$(c) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-s} - 1}{1-s} = \frac{1}{s-1} \quad \text{für } s > 1;$$

das Integral divergiert (bestimmt gegen  $+\infty$ ) für  $s < 1$ .

In analoger Weise definiert man das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

falls der Grenzwert existiert. Beidseitig unbeschränkte Integrationsbereiche werden durch Aufspaltung in zwei Summanden behandelt:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx,$$

wobei die Konvergenz *beider* Summanden gefordert wird. Im Falle der Konvergenz hängt der Wert des uneigentlichen Integrals nicht von der Wahl von  $c$  ab.

**Beispiel 9.2** Wir berechnen das beidseitig uneigentliche Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty 2xe^{-x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 2xe^{-x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2xe^{-x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (-e^{-x^2}) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-x^2}) \Big|_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (-1 + e^{-a^2}) + \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b^2} + 1) = 0. \end{aligned}$$

**Unbeschränkter Integrand.** Der zweite Typus uneigentlicher Integrale ergibt sich, wenn das Integrationsintervall  $[a, b]$  beschränkt ist, aber der Integrand unbeschränkt. Ist zum Beispiel  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Teilintervall  $[c, b]$  mit  $a < c < b$  Riemann-integrierbar, aber in einer Umgebung des linken Endpunkts  $a$  unbeschränkt, so definiert man das *uneigentliche Integral*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx,$$

sofern dieser Grenzwert existiert. Je nach Lage des Punktes, in dessen Umgebung  $f$  unbeschränkt ist, ergeben sich weitere Arten uneigentlicher Integrale. Ist zum Beispiel  $f$  in einer Umgebung des rechten Endpunkts  $b$  unbeschränkt, so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow b-} \int_a^d f(x) dx,$$

wobei entsprechend vorauszusetzen ist, dass  $f$  auf allen Intervallen  $[a, d]$  Riemann-integrierbar ist. Ist  $f$  in der Nähe eines inneren Punkts  $e \in (a, b)$  unbeschränkt, so wird der Integrationsbereich in zwei Hälften unterteilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^e f(x) dx + \int_e^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow e-} \int_a^d f(x) dx + \lim_{c \rightarrow e+} \int_c^b f(x) dx, \quad (9.1)$$

wobei die Existenz beider Limites getrennt gefordert wird. Im Fall der Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion  $f$  auf  $[a, b]$  stimmen das Riemannintegral und das uneigentliche Integral überein, wie man zeigen kann.



**Beispiel 9.3** (a)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{d \rightarrow 1-} \int_0^d \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{d \rightarrow 1-} (\arcsin d - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$

(b)  $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0+} (\log 1 - \log c) = \infty$  (bestimmte Divergenz)

(c)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{c \rightarrow 0+} \int_c^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{c \rightarrow 0+} \frac{1 - c^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{1-s}$  für  $0 < s < 1$ ;

das Integral divergiert (bestimmt gegen  $+\infty$ ) für  $s > 1$ .

**Gegenbeispiel 9.4** Im Falle der Unbeschränktheit des Integranden in der Umgebung eines inneren Punkts kann auf die Aufteilung in zwei Teilintegrale nach (9.1) und deren getrennte Konvergenz nicht verzichtet werden. Das Beispiel

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^2 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

zeigt, dass naives Einsetzen in eine Stammfunktion (die allerdings bei 0 nicht definiert ist) zu einem unsinnigen Ergebnis führen kann. Tatsächlich divergieren die beiden Teilintegrale  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$  und  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$ .

**Mehrdimensionale uneigentliche Integrale.** Wir wollen hier nur den Fall eines Doppelintegrals über die Zahlenebene  $\mathbb{R}^2$  analysieren. Eine *Ausschöpfung*  $\mathcal{A}$  von  $\mathbb{R}^2$  ist eine Folge  $(A_j)_{j \geq 1}$  beschränkter und messbarer Teilmengen  $A_j \subset \mathbb{R}^2$  mit

$$A_j \subset A_{j+1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad \text{und} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \mathbb{R}^2.$$

Man sagt, dass eine Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^2$  *bedingt uneigentlich integrierbar* ist, wenn es eine Ausschöpfung  $\mathcal{A}$  von  $\mathbb{R}^2$  gibt, für die der Grenzwert

$$(\mathcal{A}) \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{A_j} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \tag{9.2}$$

existiert. Falls der Grenzwert für alle Ausschöpfungen  $\mathcal{A}$  existiert und nicht von  $\mathcal{A}$  abhängt, so heißt  $f$  *unbedingt uneigentlich integrierbar* mit Integral  $\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ .

Man kann zeigen, dass für nichtnegative Funktionen  $f$  die bedingte und die unbedingte uneigentliche Integrierbarkeit zusammenfallen.

**Beispiel 9.5** Wir wählen zur Berechnung des Integrals der Funktion  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$  über dem  $\mathbb{R}^2$  Kreise  $A_j$  vom Radius  $j$  und erhalten nach Transformation in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, d(x, y) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \iint_{A_j} e^{-x^2-y^2} \, d(x, y) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} \, d\varphi \, dr = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( -2\pi \frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^j \right) = \pi. \end{aligned}$$

Da  $f \geq 0$  ist, ist diese Funktion unbedingt uneigentlich integrierbar. Wir erhalten dasselbe Ergebnis, wenn wir als Ausschöpfung Rechtecke  $B_j = (-j, j) \times (-j, j)$  wählen:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-j}^j \int_{-j}^j e^{-x^2-y^2} d(x, y) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-j}^j e^{-x^2} dx \int_{-j}^j e^{-y^2} dy = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Damit haben wir das Gauß'sche Integral berechnet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Daraus ergibt sich die in der Statistik wichtige Formel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1$$

für die so genannte Gauß'sche Standardnormalverteilung.

## 9.2 Die Transformationsformel für Bereichsintegrale

Wir haben im Abschnitt 2.2.3 gezeigt, wie man ein zweidimensionales Bereichsintegral in Polarkoordinaten umrechnen kann. Sei dazu  $D$  ein Bereich in der  $(x, y)$ -Ebene. Wir schreiben die Transformation in Polarkoordinaten als Abbildung

$$\mathbf{p} : \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Nehmen wir an,  $D$  ergebe sich als Bild eines Bereichs  $B$  in der  $(r, \varphi)$ -Ebene,  $D = \mathbf{p}(B)$ . Dann lautet die Transformationsformel für das Integral einer Riemann-integrierbaren Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi). \quad (9.3)$$

Tatsächlich ist dies ein Spezialfall einer allgemeinen Transformationsformel für Bereichs- und Volumensintegrale, die wir nun kurz darlegen wollen. Wir beginnen mit einer bijektiven, stetig partiell differenzierbaren Abbildung  $\mathbf{F} : B \rightarrow D = \mathbf{F}(B)$ ,  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  zwischen zwei offenen Teilmengen  $B, D \subset \mathbb{R}^n$ . So eine Abbildung nennt man eine *Koordinatentransformation*, wenn auch ihre Umkehrabbildung  $\mathbf{F}^{-1}$  stetig partiell differenzierbar ist. Man sagt auch, dass in  $D$  durch  $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  lokale Koordinaten gegeben sind.

Wir beginnen mit dem zweidimensionalen Fall. Gegeben seien offene, beschränkte Teilmengen  $B \subset \mathbb{R}^2$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  und eine Koordinatentransformation

$$\mathbf{F} : B \rightarrow D : \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}.$$

Ziel ist es, das Integral einer reellwertigen Funktion  $f$  auf dem transformierten Bereich  $D$  in ein solches auf dem Bereich  $B$  zurückzuführen. Wir legen über den Bereich  $B$  in der  $(u, v)$ -Ebene ein Gitter und greifen ein Teilrechteck heraus, etwa mit linkem unteren Eckpunkt in  $(u, v)$  und durch die Vektoren

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

aufgespannten Seiten. Das Bild des Teilrechtecks unter der Transformation  $\mathbf{F}$  wird im Allgemeinen krummlinig berandet sein. Wir wollen es in erster Näherung durch ein Parallelogramm ersetzen. In linearer Näherung gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(u + \Delta u, v) &\approx \mathbf{F}(u, v) + \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(u, v) \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}(u, v + \Delta v) &\approx \mathbf{F}(u, v) + \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(u, v) \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit der Jacobimatrix  $\mathcal{J}_{\mathbf{F}}$ . Das Näherungsparallelogramm wird also durch die Vektoren

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \Delta u \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \Delta u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \Delta v \end{bmatrix}$$

aufgespannt und hat den Flächeninhalt

$$\left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \Delta u & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \Delta u & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \Delta v \end{bmatrix} \right| = |\det \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(u, v)| \Delta u \Delta v.$$

Das Flächenelement  $\Delta A = \Delta u \Delta v$  wird, kurz gesagt, durch die Transformation  $\mathbf{F}$  in das Flächenelement  $\Delta \mathbf{F}(A) = |\det \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(u, v)| \Delta u \Delta v$  übergeführt (siehe Abb. 9.1).

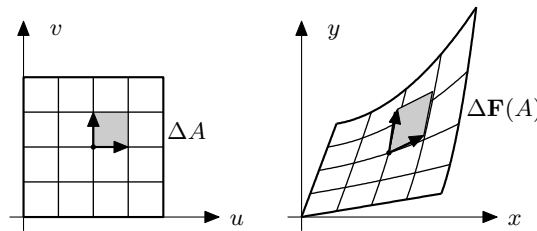


Abbildung 9.1: Transformation eines Flächenelements.

Wir betrachten nun eine auf  $D = \mathbf{F}(B)$  definierte, beschränkte Funktion mit Werten in  $\mathbb{R}$ . Um ihr Riemann-Integral über  $D$  zu berechnen, verwenden wir Riemannsummen über

dem transformierten Gitter und erhalten

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) \, d(x, y) &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta \mathbf{F}(A) \\
 &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) |\det \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(u_i, v_j)| \Delta u \Delta v \\
 &\approx \iint_B f(x(u, v), y(u, v)) |\det \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(u, v)| \, d(u, v).
 \end{aligned}$$

Diese Überlegung legt die Gültigkeit der folgenden *Transformationsformel für Bereichsintegrale* nahe.

**Satz 9.6** (Transformationsformel für zweidimensionale Riemann-Integrale) Es seien  $B, D$  offene, beschränkte Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{F} : B \rightarrow D = \mathbf{F}(B)$  eine Koordinatentransformation und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Abbildung. Dann gilt die Transformationsformel

$$\iint_D f(x, y) \, d(x, y) = \iint_B f(\mathbf{F}(u, v)) |\det \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(u, v)| \, d(u, v), \quad (9.4)$$

sofern die Funktionen  $f$  und  $f(\mathbf{F}) |\det \mathcal{J}_{\mathbf{F}}|$  Riemann-integrierbar sind.

**Beispiel 9.7** Die Jacobimatrix der Transformation in ebene Polarkoordinaten wurde im Abschnitt 3.4.1 berechnet:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{p}}(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Offenbar gilt  $|\det \mathcal{J}_{\mathbf{p}}(r, \varphi)| = r$ , und damit gewinnen wir die Formel (9.3) zurück.

Analog gilt für räumliche Koordinatentransformationen

$$\mathbf{F} : B \rightarrow D : \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{bmatrix}$$

und dreidimensionale Bereichen  $B, D$  die Formel

$$\iiint_D f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iiint_B f(\mathbf{F}(u, v, w)) |\det \mathcal{J}_{\mathbf{F}}(u, v, w)| \, d(u, v, w). \quad (9.5)$$

**Beispiel 9.8** Kugelkoordinaten im Raum sind gegeben durch die Transformation

$$\mathbf{k} : (r, \theta, \varphi) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Die Jacobimatrix wurde in Abschnitt 3.4.1 berechnet:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{k}}(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt

$$\det \mathcal{J}_{\mathbf{k}}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$$

und damit

$$\iiint_D f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iiint_B f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, d(r, \theta, \varphi).$$

Ist zum Beispiel  $D$  die Kugel vom Radius  $R$  um den Ursprung, so können wir ihr Volumen wie folgt berechnen:

$$V = \iiint_D d(x, y, z) = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta dr = \frac{r^3}{3} \Big|_0^R (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

## 9.3 Numerische Berechnung von Nullstellen

### 9.3.1 Das Bisektionsverfahren

Abb. 9.2 zeigt den Graphen einer auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktion, die im linken Endpunkt kleiner Null, im rechten größer Null ist. Anschaulich muss der Graph mindestens einmal die  $x$ -Achse kreuzen, da er wegen der Stetigkeit keine Sprünge macht. Das heißt also,  $f$  muss wenigstens eine Nullstelle  $\xi \in (a, b)$  haben. Dies ist ein Kriterium, das die Existenz einer Lösung der Gleichung  $f(x) = 0$  garantiert. Ein erster rigoroser Beweis dieser anschaulich klaren Aussage geht auf Bolzano<sup>1</sup> zurück und wird als *Zwischenwertsatz* bezeichnet.

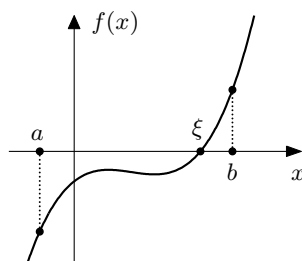


Abbildung 9.2: Zum Zwischenwertsatz.

<sup>1</sup>B. Bolzano, 1781–1848.

Die Situation des Satzes legt ein Verfahren zur Berechnung der Nullstelle nahe, das so genannte *Bisektionsverfahren*. Es wird wie folgt durchgeführt: Man beginnt mit dem Startintervall mit Endpunkten  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ . Anschließend fährt man rekursiv fort.

Schritt 1: Berechne  $y_1 = f(\frac{a_1+b_1}{2})$ .

Falls  $y_1 > 0$ : setze  $a_2 = a_1$ ,  $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ .

Falls  $y_1 < 0$ : setze  $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ ,  $b_2 = b_1$ .

Falls  $y_1 = 0$ : Abbruch,  $\xi = \frac{a_1+b_1}{2}$  ist Nullstelle.

Es ist nunmehr  $f(a_2) < 0$ ,  $f(b_2) > 0$  und die Intervalllänge halbiert:

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1).$$

Schritt 2: Berechne  $y_2 = f(\frac{a_2+b_2}{2})$ .

Falls  $y_2 > 0$ : setze  $a_3 = a_2$ ,  $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ .

Falls  $y_2 < 0$ : setze  $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ ,  $b_3 = b_2$ .

Falls  $y_2 = 0$ : Abbruch,  $\xi = \frac{a_2+b_2}{2}$  ist Nullstelle.

Weitere Iteration führt zu einer monoton wachsenden und einer monoton fallenden Folge

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Die Differenzen der oberen und unteren Intervallgrenzen  $|a_n - b_n| \leq |a - b|/2^{n-1}$  gehen gegen Null. Falls die Nullstelle  $\xi$  nicht schon nach endlich vielen Schritten als eines der  $a_k$  oder  $b_k$  aufgetreten ist, gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0.$$

Somit wird die Nullstelle durch die Intervalle  $[a_n, b_n]$  eingeschlossen; es gilt  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

Das Bisektionsverfahren konvergiert zwar nur langsam, ist aber einfach programmierbar und universell einsetzbar – auch für nicht differenzierbare, stetige Funktionen. Für differenzierbare Funktionen gibt es wesentlich rascher konvergente Verfahren, wie wir sehen werden.

**Beispiel 9.9** Berechnung von  $\sqrt{2}$  als Nullstelle von  $f(x) = x^2 - 2 = 0$  im Intervall  $[1, 2]$  mittels Bisektionsverfahren:

Start:	$f(1) = -1 < 0$ , $f(2) = 2 > 0$ ;	$a_1 = 1$ , $b_1 = 2$
Schritt 1:	$f(1.5) = 0.25 > 0$ ;	$a_2 = 1$ , $b_2 = 1.5$
Schritt 2:	$f(1.25) = -0.4375 < 0$ ;	$a_3 = 1.25$ , $b_3 = 1.5$
Schritt 3:	$f(1.375) = -0.109375 < 0$ ;	$a_4 = 1.375$ , $b_4 = 1.5$
Schritt 4:	$f(1.4375) = 0.066406... > 0$ ;	$a_5 = 1.375$ , $b_5 = 1.4375$
Schritt 5:	$f(1.40625) = -0.022461... < 0$ ;	$a_6 = 1.40625$ , $b_6 = 1.4375$
usw.		

Nach 5 Schritten ist somit die erste Nachkommastelle ermittelt:

$$1.40625 < \sqrt{2} < 1.4375$$

### 9.3.2 Das Newtonverfahren

Mit Hilfe der Methoden der Differentialrechnung können effiziente numerische Verfahren zur Berechnung von Nullstellen differenzierbarer Funktionen konstruiert werden. Eines der grundlegenden Verfahren ist das *Newtonverfahren*<sup>2</sup>, das wir zunächst für den Fall reellwertiger Funktionen  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einer reellen Veränderlichen besprechen wollen.

**Konstruktion des Newtonverfahrens.** Ziel der Konstruktion ist es, ein Verfahren zu erhalten, das rasch konvergiert, zumindest wenn man nahe genug bei der Nullstelle  $\xi$  startet und diese eine einfache Nullstelle einer differenzierbaren Funktion ist. Die geometrische Idee hinter dem Newtonverfahren ist einfach: Hat man eine Näherung  $x_n$  gewählt, so berechnet man  $x_{n+1}$  als Schnittpunkt der Tangente an den Graphen von  $f$  durch  $(x_n, f(x_n))$  mit der  $x$ -Achse. Die Tangentengleichung ist

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Den Schnittpunkt  $x_{n+1}$  mit der  $x$ -Achse erhält man aus

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

wobei natürlich  $f'(x_n) \neq 0$  vorauszusetzen ist. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn  $x_n$  nahe genug an der Nullstelle  $\xi$  liegt. Ist nämlich  $f'$  stetig und  $\xi$  eine einfache Nullstelle von  $f$ , so ist nicht nur  $f'(\xi) \neq 0$ , sondern  $f'$  in einer ganzen Umgebung von  $\xi$  verschieden von Null.

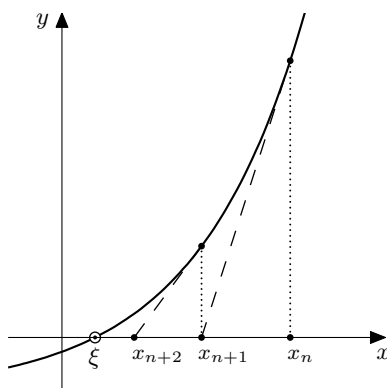


Abbildung 9.3: Zum Newtonverfahren.

Wir wollen uns nun die Konvergenzgeschwindigkeit des Newtonverfahrens näher anschauen. Taylorentwicklung um  $x_n$  zeigt

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(\xi - x_n)^2 + \mathcal{O}(|\xi - x_n|^3).$$

<sup>2</sup>I. Newton, 1642–1727.

Wir schreiben den  $n$ -ten Iterationsschritt des Newtonverfahrens um zu

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$0 = f'(x_n)(\xi - x_{n+1}) + \frac{1}{2}f''(x_n)(\xi - x_n)^2 + \mathcal{O}(|\xi - x_n|^3).$$

Daraus folgt

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \left| \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \right| |\xi - x_n|^2 + \mathcal{O}(|\xi - x_n|^3).$$

Wenn also  $f''(x_n)$  beschränkt bleibt und  $f'(x_n)$  verschieden von Null ist – beides ist in der Nähe einer einfachen Nullstelle einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion der Fall –, so gilt für den Fehler im  $(n+1)$ -ten Schritt

$$|\xi - x_{n+1}| \leq C|\xi - x_n|^2,$$

er nimmt also mit dem Quadrat des Fehlers des  $n$ -ten Schritts ab. Man spricht von *quadratischer Konvergenz*, während das Bisektionsverfahren nur *linear* konvergiert.

**Beispiel 9.10** Zur Berechnung der Nullstelle  $\xi = \sqrt[3]{2}$  von  $x^3 - 2 = 0$  wurde das Bisektionsverfahren und das Newtonverfahren mit Startwert  $x_0 = 2$  verwendet. Die Näherungswerte  $x_n$  sowie die Intervallgrenzen  $[a_n, b_n]$  sind in Tabelle 9.1 und Tabelle 9.2 angeführt. Das Newtonverfahren erreicht den Wert

$$\sqrt[3]{2} = 1.25992104989487$$

auf 14 Nachkommastellen genau bereits bei der siebten Iteration.

Tabelle 9.1: Bisektionsverfahren zur Berechnung der dritten Wurzel aus zwei.

n	$a_n$	$b_n$	Fehler
1	-2.000000000000000	2.000000000000000	4.000000000000000
2	0.000000000000000	2.000000000000000	2.000000000000000
3	1.000000000000000	2.000000000000000	1.000000000000000
4	1.000000000000000	1.500000000000000	0.500000000000000
5	1.250000000000000	1.500000000000000	0.250000000000000
6	1.250000000000000	1.375000000000000	0.125000000000000
7	1.250000000000000	1.312500000000000	0.062500000000000
8	1.250000000000000	1.281250000000000	0.031250000000000
9	1.250000000000000	1.265625000000000	0.015625000000000
10	1.257812500000000	1.265625000000000	0.007812500000000
11	1.257812500000000	1.261718750000000	0.003906250000000
12	1.259765625000000	1.261718750000000	0.001953125000000
13	1.259765625000000	1.260742187500000	0.000976562500000
14	1.259765625000000	1.260253906250000	0.000488281250000
15	1.259765625000000	1.260009765625000	0.000244140625000
16	1.259887695312500	1.260009765625000	0.000122070312500
17	1.259887695312500	1.259948730468750	0.000061035156250
18	1.259918212890630	1.259948730468750	0.000030517578125



Tabelle 9.2: Newtonverfahren zur Berechnung der dritten Wurzel aus zwei.

n	$x_n$	Fehler
1	2.000000000000000	0.74007895010513
2	1.500000000000000	0.24007895010513
3	1.29629629629630	0.03637524640142
4	1.26093222474175	0.00101117484688
5	1.25992186056593	0.00000081067105
6	1.25992104989539	0.00000000000052
7	1.25992104989487	0.00000000000000

**Bemerkung 9.11** Das Konvergenzverhalten des Newtonverfahrens hängt davon ab, ob die Bedingungen erfüllt sind. Ist der Startwert  $x_0$  zu weit von der Nullstelle  $\xi$  entfernt, so kann es zu Divergenz, Oszillationen oder Konvergenz zu einer anderen Nullstelle kommen. Ist  $f'(\xi) = 0$ , besitzt die Nullstelle  $\xi$  also eine Vielfachheit  $> 1$ , so reduziert sich die Konvergenzordnung des Newtonverfahrens.

**Das Newtonverfahren für Funktionen mehrerer Variablen.** Wir betrachten nun ein System von  $n$  nichtlinearen Gleichungen in  $n$  Unbekannten (Anzahl der Gleichungen = Anzahl der Unbekannten)

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Wir fassen diese Gleichungen zu einem Vektor zusammen und betrachten die vektorwertige Funktion  $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Gesucht ist ein Punkt  $\boldsymbol{\xi}$  mit  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ .

Das Newtonverfahren in mehreren Variablen lautet nun

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

mit der Jacobimatrix  $\mathcal{J}_{\mathbf{f}}$ . Es kann aus der Taylorentwicklung hergeleitet werden und entspricht formal dem Newtonverfahren in einer Variablen. Damit es anwendbar ist, muss die Jacobimatrix invertierbar sein. Praktisch wird man nicht in jedem Schritt die Inverse der Jacobimatrix berechnen, sondern das so genannte *Inkrement*  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

ermitteln und dann die nächste Näherung berechnen durch

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}.$$

**Beispiel 9.12** (Schnitt eines Kreises mit einer Hyperbel,  $n = 2$ ) Die Gleichungen lauten

$$\text{Kreis: } x^2 + y^2 = 4; \quad \text{Hyperbel: } xy = 1.$$

Wir stellen diesen Problem in den allgemeinen Rahmen von vorhin

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \quad \mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ xy - 1 \end{bmatrix}.$$

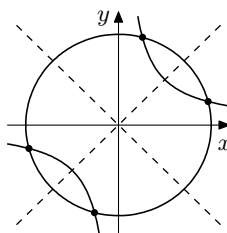


Abbildung 9.4: Die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Hyperbel.

Die gesuchten Schnittpunkte erfüllen also  $\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{0}$ . Die Jacobimatrix lautet

$$\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Somit ist

$$\det \mathcal{J}_{\mathbf{f}}(x, y) = 2x^2 - 2y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y.$$

Diese beiden Geraden muss das Newtonverfahren vermeiden.

Wir lösen das System

$$x^2 + y^2 - 4 = 0, \quad xy = 1$$

zunächst analytisch (im Allgemeinen unmöglich). Rechnet man aus der zweiten Gleichung  $x$  aus und setzt es in die erste ein, so ergibt sich die biquadratische Gleichung

$$y^4 - 4y^2 + 1 = 0$$

mit den Lösungen  $y^2 = 2 \pm \sqrt{3}$ . Aus der ersten Gleichung folgt

$$x^2 = 4 - y^2 = 2 \mp \sqrt{3}.$$

Die Lösung mit der größten  $x$ -Komponente lautet daher

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1.93185..., \quad y = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.517638...$$

Um diese Lösung numerisch zu erhalten, wenden wir das Newtonverfahren mit den Startwerten  $x_0 = 2$  und  $y_0 = 1$  an. Wir erhalten

x	y	Norm des Inkrements
2.0000000000000000	1.0000000000000000	
2.0000000000000000	5.000000000000000E-01	5.000000000000000E-01
1.9333333333333333	5.166666666666667E-01	6.87184270936277E-02
1.93185274109644	5.17637054821929E-01	1.77025606730381E-03
1.93185165257893	5.17638090204244E-01	1.50229387822393E-06
1.93185165257818	5.17638090205042E-01	1.12770878384672E-12

Ergebnis:  $x = 1.93185165257818$

$y = 0.517638090205042$

Man erkennt deutlich die *quadratische* Konvergenz des Verfahrens.